LEÇONS
DE
MÉCANIQUE ANALYTIQUE.

LEÇONS

DE

MÉCANIQUE ANALYTIQUE,

DONNÉES A L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE

PAR Mr. DE PRONY,

L'un des professeurs de cette École, Membre de l'Institut de France et de la Légion d'Honneur.

PREMIÈRE PARTIE

QUI TRAITE DE L'ÉQUILIBRE DES CORPS SOLIDES.

A PARIS.

M. DCCC. X.

DE L'IMPRIMERIE DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.

Chargé, dès la création de l'École Polytechnique, (en 1794) (*) d'y professer l'application de l'analyse à la *mécanique*, un de mes premiers soins fut de m'occuper de la composition d'un cours élémentaire de la science de l'équilibre et du mouvement adapté au système général des études de cet établissement célèbre, cours qui ne pouvait pas être suppléé par les ouvrages suivis jusqu'alors dans les écoles du génie et de l'artillerie. Ces ouvrages, quoique digne de l'estime dont ils jouissaient, offraient, relativement à la condition que j'avais à remplir, l'inconvénient, de ne pas mettre à profit, pour la clarté et la généralité de l'exposition, les ressources de la géométrie analytique, dont les monuments élevés aux sciences par quelques géomètres du premier ordre, attestaient, depuis longtemps, la grande utilité. J'avais à la vérité publié, en 1790, un traité de mécanique, servant d'introduction à mon *architecture hydraulique*, entièrement fondé sur les méthodes employées avec tant de succès par les géomètres dont je viens de parler, et qui ont le précieux avantage de s'appliquer immédiatement aux trois dimensions des corps, ou aux cas de la nature; cette introduction est, je crois, la première production de son genre, destinée à l'instruction des ingénieurs et des artistes, où les directions des forces, leurs points d'application, et en général les systèmes sur lesquels elles agissent aient été rapportés à trois plans coordonnés comme ils le sont dans le *Théoria motus corporum rigidorum*, les *mécaniques analytique* et *céleste* etc., (**) mais

(*) La première loi concernant cette école, est du 11 mars 1794, (21 ventose an 2)

(**) Voyez, pour plus de détail sur cet ouvrage, et sur mes travaux subséquents, relatifs à l'enseignement de l'École Polytechnique, le *rapport historique sur les progrès des sciences mathématiques depuis 1789 etc.*, par M. Delambre, l'un des Secrétaires perpétuels de la première classe de l'Institut impérial de France.

eu égard aux développements qu'elle contenait et à la forme à laquelle, par sa destination spéciale, sa composition avait été assujettie, elle ne me dispensait pas de rédiger des cahiers particuliers offrant textuellement la matière de mes leçons.

La rédaction de ces cahiers fut menée de front avec celle d'une suite de leçons d'analyse pure qu'on fesait imprimer pour les distribuer aux élèves; les feuilles de mécanique leur étaient seulement communiquées en manuscrit parcequ'elles contenaient la partie de mon travail à laquelle j'attachais la principale importance, et que je voulais, avant de la livrer à l'impression, revoir et retoucher avec plus de loisir que je n'en avais eu pendant une rapide et première composition. Cependant le conseil d'administration et d'instruction de l'École Polytechnique, après m'avoir pressé, plusieurs fois, de publier mon cours, réitéra ses instances en 1801; mais les fréquentes missions que je recevais du gouvernement, et qui consommaient une partie notable de mon temps, ne me permettant pas de remplir les intentions de ce conseil aussitot que je l'aurais desiré, M. Francœur, ancien élève de l'école et l'un des plus assidus à mes leçons, dont il avait les feuilles manuscrites, publia l'ouvrage intitulé *Traité élémentaire de mécanique, d'après les méthodes de R. Prony* qui, en peu d'années, a eu plusieurs éditions. Depuis ce temps j'ai pu mettre la dernière main à mon travail et j'en ai fait, par des augmentations et des améliorations très-considérables, un ouvrage qu'on peut regarder comme nouveau; c'est ce que pourront vérifier, à la simple inspection, les personnes qui auront, avec le livre publié en 1801, celui que je mets au jour en ce moment; on trouve même, dans ce dernier, des théories importantes qui n'éxistaient pas encore lorsque le premier a paru.

Les lecteurs curieux de connoître d'avance l'ordre d'ex-

position que j'ai suivi pourront parcourir les tables des matières; ils y trouveront, à peu de chose près, quand à la partie purement rationnelle de la science, les mêmes séries de questions sur l'équilibre et le mouvement, dont se compose l'excellent *traité de mécanique* de mon collègue M. Poisson, ainsi qu'on devait s'y attendre d'après l'objet commun que nous avons eu en vue; mon livre est un peu plus volumineux que le sien, mais cette différence tient à des digressions dans lesquelles j'ai voulu, en faveur des ingénieurs et des artistes, donner quelques exemples de l'application de la théorie aux machines et aux arts de construction.

E R R A T A.

Page 1 *l. dernière*, d'où dérive la *densité*, *lisez*, d'où dérive la *densité* quand on la combine avec l'*étendue*,

Ibid. ligne 4 (*du b.*), conaissannces, *lisez* connaissances

4 *ligne* 4 (*du bas*), envisagée *lisez* envisagées

7 *lig.* 7 (*du haut*), par *lisez* pour, et *lig.* 9, attirer, *lisez* attiré

Ibid., 13 (*du h.*), des prssions, *lisez* des pressions

9 *lig.* 9 (*du b.*) je comptent, *lisez* se comptent

15 *lig.* 14 (*du b.*), nombre entier, *lisez* nombre entier;

17 *ligne* 6 (*du b.*) $\frac{P}{R}$, *lisez* $\frac{R}{P}$, et, *ligne dernière*, même faute.

18 *ligne* 6 (*du h.*), rappot, *lisez* rapport

20 *lig.* 5 (*du h.*), $1-A\,1-B$, *lisez* $1-A, 1-B$

21 *lig.* 5 (*du b.*), et proportionelles, *lisez* et proportionnelles

Ibid. ligne 13 (*du b.*), prise, *lisez* prises

22 *lig.* 3 (*du h.*), Fig. 3, *lisez* Fig. 4, et *lig.* 17 (*du b.*), *ajoutez* Fig. 5.

23 *ligne* 12 (*du h.*), du triangles, *lisez* du triangle *Ibid* 13 (*du b.*) obs, *lisez* ob-

28 *ligne* 6 (*du h.*), pour l'axe des y, *lisez* pour l'axe des z

34 *lig.* 9 (*du b.*), et directiou, *lisez* et direction

35 *lig.* 13 (*du b.*), θ' *lisez* θ

39 *ligne* 12 (*du h.*), $\left(\frac{dK}{dz}\right)$ *lisez* $\left(\frac{dK}{dx}\right)$

41 *lig.* 13 (*du b.*) $X, Y\,Z$, *lisez* X, Y, Z,

42 *l.* 2 (*du h.*), quetions, *l.* questions et *l.* 6 (*du h.*), agisse, *l.* agit

43 *ligne* 2 (*du b.*) qu'elles *lisez* quelles

45 *ligne* 15 (*du h.*), tengente, *lisez* tangente

46 *ligne* 11 (*du b.*), par, *lisez* pour

47 *ligne première*, concécutifs, *lisez* consécutifs

51 *ligne* 16 (*du b.*), $Q'AR'$, *lisez* $Q'BR'$

Ibid. ligne 18 (*du b.*), AQ' *lisez* AB

53 *ligne* 11 (*du h.*), p'' *lisez* P''

54 *ligne* 5 (*du h.*), assuré *lisez* assurée

57 *ligne* 7 (*du b.*), indéterminées, *lisez* indéterminée, et *lig.* 11 (*du b.*), abbaissée, *lisez* abaissée
58 *ligne* 10 (*du b.*), sera, *lisez* sur
61 *lig.* 2 (*du h.*), les condition, *lisez* les conditions
63 *lignes* 3, 4 et 5 (*du b.*), l'équilibre n'a pas lieu, ainsi que je l'ai dit précédemment, c'est-à-dire que, par rapport à ce point, $\Sigma(Pp)$ est une quantité finie positive ou négative, *lisez* ou lorsque, par rapport à ce point, $\Sigma(Pp)$ est une quantité finie, positive ou négative, l'équilibre n'a pas lieu, ainsi que je l'ai dit précédemment.
64 *ligne* 15 (*du b.*), angles possible, *lisez* angles possibles
67 *ligne* 10 (*du h.*), leurs définitions, *lisez* leur définition
Ibid. lig. 11 (*du h.*), analogue à celle, *lisez* analogues à celles
75 *ligne* 12 (*du h.*) l, m et n, *lisez* λ, μ et ν
83 *ligne* 2 (*du b.*), article 167, *lisez* articles 167 et 168
84 *l.* 13 (*du h.*), $\lambda \cos. \alpha + \mu \text{c.} \beta + \nu \text{c.} \gamma$, *l.* $\lambda \cos. A + \mu \text{c.} B + \nu \text{c.} C$
101 *ligne dernière du texte*, (C) *lisez* (C')
103 *ligne* 9 (*du b.*), $\Sigma(Pp)$, *lisez* $\Sigma(Pb)$
105 *ligne* 10 (*du b.*), de toutes forces, *lisez* de toutes ces forces
110 *ligne* 11 (*du h.*), pesenteur, *lisez* pesanteur
Ibid. l. 15 (*du h.*), *après le nombre* 6366198, *ajoutez le mot* mètres
114 *lig.* 10 (*du b.*), abbaissée, *lisez* abaissée
116 *ligne* 9 (*du h.*), coordonées, *lisez* coordonnées
127 *lig.* 18 (*du h.*) $b\chi \times KLLLKK$ *lisez* $b\chi \times KLLK'K$
130 *lig.* 11 (*du b.*), je fait, *lisez* je fais
142 *ligne* 14 (*du h.*), le même plan, *lisez* le plan
Ibid. ligne 5 (*du b.*), son, *lisez* sont
143 *l.* 16 (*du h.*), fixes *l.* fixe, et *l.* 17 (*du h.*), des points, *l.* de points
144 *ligne* 3 (*du h.*), immobiles, *lisez* immobile
148 *ligne* 10 (*du b.*), des plan, *lisez* des plans
150 *ligne* 14 (*du h.*), de la force, *lisez* de la forme
151 *ligne* 2 (*du h.*), qui leurs, *lisez* qui leur, et *lig.* 5 (*du b.*), représentants, *lisez* représentant
155 *ligne dernière*, rapports, *lisez* rapport
162 *l.* 14 (*du h*), ocuppons, *l.* occupons, et *l.* 8 (*du b.*), pris, *l.* prise
172 *ligne* 2 (*du h.*), ou 3e., *lisez* du 3e.

177 *ligne* 11 (*du h.*), er, *lisez* et
179 *ligne* 5 (*du b.*), la tenssion, *lisez* la tension
180 *ligne* 11 (*du h.*), derniet poinr, *lisez* dernier point
Ibid. ligne 15 (*du h.*), consruction, *lisez* construction
181 *ligne* 4 (*du h.*), ρ', *lisez* ρ,
198 *lig.* 12 (*du b.*), je prend, *lisez* je prends
200 *ligne* 16 (*du h.*), p', *lisez* P'
205 *ligne dernière*, P cos. α, + etc. = o, P cos. δ + etc. = o,
lisez P cos. α' + etc. = o, P cos. δ' + etc. = o.
209 *ligne* 5 (*du b.*), le poids, *lisez* le point
217 *lig.* 10 (*du h.*), conditons, *lisez* conditions
240 *ligne* 13 (*du b.*), celui a lieu, *lisez* celui qui a lieu
245 *ligne* 4 (*du b.*), forces, *lisez* force
247 *lig.* 10 (*du h.*), d'abbaissement, *lisez* d'abaissement
248 *ligne* 7 (*du b.*) pesant, *lisez* pesants
251 *ligne* 7 (*du h.*), des deux autres, *lisez* des deux autres B et B'
Ibid. ligne 2 (*du bas.*), B et B, *lisez* B et B'
261 *ligne* 6 (*du h.*), du contact n'est, *lisez* du contact qui n'est
265 *lig.* 2 (*du b.*), du sommet où arête, *lisez* du sommet ou arête
280 *ligne* 17 (*du h.*), $M-\mu$, *lisez* $M-\mu'$
284 *ligne* 3 (*du h.*), essentielle; *lisez* essentiel
299 *ligne* 8 (*du haut*), q^2, *lisez* q,
301 *ligne* 11 (*du h.*), QK est la valeur du moment de la résistance,
lisez QK est la valeur du moment de la résultante
Page 2 de la table, *lig. dernière*, leurs définitions, *lisez* leur définition

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE
DE STATIQUE.

SECTION I.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.
ET PARTIE DE LA STATIQUE,
DANS LAQUELLE ON CONSIDERE PLUSIEURS FORCES
APPLIQUÉES A UN MÊME POINT.

Objet général de la mécanique.

1. Les Sciences mathématiques et physiques embrassent l'universalité des propriétés des corps et des phénomènes de la nature, et chacune d'elles a pour objet spécial, qui la distingue des autres, une partie de ces propriétés et de ces phénomènes.

2. Ainsi les *Mathématiques pures* considèrent particulièrement tout ce qui est relatif à la *grandeur* ou *quantité*, soit qu'on la représente par des nombres dont l'expression est ou absolue ou algébrique, soit qu'on la fasse dépendre de l'*étendue* et de la *figure*; et comme les idées de *quantité*, d'*étendue* et de *figure* se trouvent liées à toutes celles qui composent le système des autres sciences, l'étude de ces dernières doit avoir, pour préliminaire indispensable, celle des *Mathématiques pures*, qui peuvent être regardées comme formant la première division du système général de la partie des conaissannces humaines dont il s'agit ici.

3. La *mécanique*, ou la science de l'*équilibre* et du *mouvement*, intimement liée à la géométrie, emprunte d'elle, l'*étendue* et la *figure*, et réunissant à ces propriétés abstraites, la *masse*, d'où dérive la *densité*,

l'*impénétrabilité*, la *mobilité* et l'*inertie*, fait, de plus, entrer en considération le *temps* et la *force* ou *puissance*.

L'Étude de la mécanique porte ainsi sur des objets plus composés que ceux de la géométrie, mais les raisonnements et les démonstrations n'ont pas moins de certitude dans l'une que dans l'autre : la première a même l'avantage de fournir des méthodes qui ne laissent plus rien a désirer pour la solution ou la *mise en équation* des problèmes qui lui sont propres, en sorte qu'on peut, sous ce point de vue, regarder la *mécanique rationnelle* comme une science complete ou terminée.

J'entrerai bientôt, sur la *force* ou *puissance*, dans les détails nécessaires pour en donner une notion exacte sous le point de vue qui intéresse ce traité ; quant aux autres propriétés des corps, dont je viens de faire l'énumération, les élèves, que je suppose instruits, au moins des premiers principes de la physique, n'ont besoin d'aucune explication sur ce qui les concerne, explications qui, d'ailleurs, ne sont vraiment utiles que pour les parties de la mécanique qui suivent celles dont je vais m'occuper.

4. La mécanique considérée dans ses rapports avec les trois grandes divisions des sciences naturelles qui viennent après les *mathématiques pures*, et qui sont la *physique*, la *chimie* et l'*histoire naturelle*, appartient évidemment à la physique, et on en doit dire autant de l'*astronomie physique* qui offre les plus belles applications qu'on ait faites des lois du mouvement; mais vu l'étendue actuelle de ces deux branches, et pour les présenter avec les détails convenables, on a pris le parti de les isoler du tronc principal, et de les renfermer dans des traités séparés. Cette division et cette séparation d'études et de recherches, sont les conséquences naturelles du progrès des connaissances.

Notions générales sur la *force* ou *puissance*.

5. Les notions d'*espace*, d'*étendue* et de *corps* ou *solide* étant acquises par l'étude de la géométrie, on en déduit immédiatement l'idée générale du *mouvement* qui est le passage du *corps* ou *solide* d'une position qu'il occupe, dans l'espace, à une autre position. Cette idée est même déjà devenue familière à ceux qui se sont occupé de géométrie et qui ont souvent employé le mouvement pour expliquer la génération des lignes, des surfaces et des solides.

Le *repos*, en mécanique, est l'immobilité du *corps* ou *solide* dans l'*espace*.

6. La nature ne nous offre aucun exemple d'un corps qui passe de l'état de *repos* à celui de *mouvement*, ou réciproquement, sans que ce changement d'état ne soit la suite d'une *action* exercée sur ce corps par un agent qui en est indépendant, et on admet, comme vérité de fait, qu'un corps ne peut pas, par lui-même, c'est-à-dire sans l'action d'un agent extérieur, changer son état de repos ou de mouvement.

7. Il n'existe, selon toutes apparences, aucune portion de matière dans l'univers, qui ne soit dans un état actuel de mouvement; l'immobilité que nous observons dans quelques corps, à la surface de la terre, n'est qu'apparente ou *relative*, puisque ces corps se meuvent avec la planete dont ils font partie et qui tourne autour de son axe et autour du soleil; on a même d'assez fortes raisons de penser que le soleil lui-même et le système planétaire, sont entraînés d'un mouvement commun dans l'espace.

Cependant, d'une part, on ne peut rien conclure de là, sur l'impossibilité de l'état de repos, car il est fort aisé de concevoir la combinaison du mouvement particulier d'un corps, à la surfaçe d'une planete, et du mouvement qui lui est commun avec cette planète, faite de manière que le corps reste immobile dans l'espace absolu; d'une autre part, à mesure qu'on avance dans l'étude et la connaissance de la nature, on s'assure, de plus en plus, que les mouvements qui s'opèrent dans l'univers, peuvent être expliqués et calculés, sans qu'on soit obligé de supposer aux corps une faculté de se mouvoir indépendamment des causes motrices extérieures; d'où on conclut que ces causes extérieures sont nécessaires pour la production du mouvement. On voit ici la liaison qui existe entre l'établissement de quelques notions très-élémentaires, et la considération des plus grands phénomènes que nous offre l'observation de la nature.

8. Il suit de ces notions que le *repos* d'un corps peut avoir lieu dans deux cas, savoir; lorsque le corps n'éprouve l'action d'aucun agent extérieur capable de le mettre en mouvement, et lorsque, éprouvant cette action, le mouvement qui en devrait résulter est arrêté ou empêché, soit par des obstacles qui ne permettent pas au corps de se déplacer, soit par d'autres agents qui annulent l'action des premiers, dont l'effet, dans ce cas, se borne à donner au corps une simple *tendance* au mouvement.

9. Toute cause motrice capable, soit d'imprimer à un corps ou un mouvement actuel, ou une tendance au mouvement, soit d'arrêter son mouvement actuel, soit, enfin, de rendre sa tendance au mouvement, sans effet, est ce qu'on appelle une *force* ou *puissance*.

10. La nature de la *force* ou *puissance* nous est inconnue, mais ses effets sont soumis à des lois générales, bien constatées, qui reposent sur un petit nombre de principes fondamentaux, au moyen desquels on peut toujours calculer et prévoir les phénomènes d'équilibre ou de mouvement résultants de circonstances connues et qui fournissent les *données* suffisantes.

11. C'est à l'exercice de nos facultés organiques que nous devons la première connaissance des effets de la *force*. Nous avons le pouvoir, en agissant sur les corps, de les mettre en mouvement, ou de les réduire à l'état de repos; nous voyons de semblables phénomènes résulter des actions réciproques des animaux sur les corps, et des corps les uns sur les autres, et nous regardons, par analogie, ces effets divers, comme liés à une cause commune. Ainsi nous disons la *force* d'un homme, la *force* d'un cheval, la *force* d'un *ressort*, etc., pour exprimer les facultés qu'ont ces divers agents, de produire ou d'empêcher le mouvement.

12. Le mode d'action des agents dont je viens de parler, peut toujours être perceptible aux sens, et a lieu en choquant, poussant ou tirant, soit immédiatement, soit par l'intermède de quelque corps; mais il existe dans la nature, d'autres agents dont le mode d'action échappe aux sens, et ne se manifeste que par les phénomènes qui en résultent : tels sont les phénomènes connus sous les noms d'*attractions* et *répulsions electriques* et *magnétiques*, ceux de la *pesanteur* de la *gravitation universelle*; mais les agents cachés dont l'action devient apparente dans ces phénomènes, sont soumis, soit en produisant, soit en arrêtant le mouvement, aux mêmes lois que les agents visibles.

Des forces considérées comme quantités mathématiques ; de leur comparaison et de leur mesure envisagée sous le point de vue qui intéresse particulièrement la partie de la mécanique exposée dans ce traité. Toutes ces forces peuvent être représentées par des *poids*.

13. Le mouvement et les phénomènes qui en dependent, et qui

rendent si manifestes à nos sens les effets de la *force*, peuvent être, dès l'abord, les objets des études des élèves qui veulent apprendre la mécanique, et, même, l'exposition préliminaire des principes généraux de la partie de cette science qui traite du mouvement, et de quelques unes de leurs applications, présente plusieurs avantages. L'organisation de l'enseignement de l'École Polytechnique, à laquelle ce traité est particulièrement destiné, me détermine à suivre un autre ordre d'exposition; je supprimerai de cette première partie du cours, tout ce qui tient à la considération des corps animés d'un mouvement effectif, et j'y restreindrai l'effet de la *force* à ce qui concerne la simple *tendance* au mouvement, qui est, ou imprimée à un corps dépourvu de cette *tendance*, ou rendue sans effet dans un corps où elle existe d'avance.

14. Il est nécessaire d'avoir, sous ce point de vue particulier, une idée nette et précise de la comparaison et de la mesure des *forces*.

Si un corps pesant est en repos sur une table ou sur un plan horizontal, et qu'on veuille, en substituant la main à cette table ou à ce plan, empêcher le corps de descendre, il faut exercer sur lui ce qu'on appelle un *effort*, capable de rendre sans effet sa *tendance* au mouvement; *tendance* au moyen de laquelle il exerce sur notre main une *pression*. Notre *effort* est une action provenant de la *force* que comporte notre organisation, la *pression* est une action contraire provenant de la *force* due à la pesanteur, et, dans le cas ou le corps sollicité au mouvement par chacune de ces forces, ne prend cependant aucun mouvement, il est dans un état qu'on appelle état d'*équilibre*.

En augmentant ou en diminuant la masse du corps soutenu, et observant les changements d'effets, sur nos organes, qui en résultent, nous acquérons une idée du *plus* et du *moins* dans l'*effort*, dans la *pression*, et par conséquent dans la *force*, qui nous fait, dès lors ranger cette *force* parmi les quantités mathématiques.

15. Les forces étant susceptibles d'augmentation et de diminution, c'est-à-dire étant des quantités mathématiques, ont donc entr'elles des rapports assignables; on peut prendre une force déterminée pour unité ou terme de comparaison, et exprimer toutes les autres forces par des nombres qui seront leurs rapports avec l'unité de *force*.

16. Ces premières notions suffisent pour l'établissement d'une théorie, sur les actions des forces, indépendante, tant du choix qu'on peut faire

dans la nature d'une unité pour la mesure absolue de forces, que des considérations *physiques* d'après lesquelles on rapporterait à ce type les *quantités* ou *intensités* des autres forces. Il est cependant bon, afin de fixer les idées, de convenir d'avance, et de l'*unité de mesure* des forces et du mode *physique* de leurs comparaisons.

Dans cette détermination, on regarde comme vérités de *fait*, que les *pressions* exercées par différents corps pesants de même matière homogène, de même volume, et pris d'ailleurs, à tous égards, dans les mêmes circonstances physiques, que ces *pressions*, dis-je, sont égales entr'elles, que la réunion de 2, 3 etc., de ces corps, donne une *pression* double, triple, etc., de celle d'une masse individuelle, et qu'en général les corps dont il s'agit exercent des *pressions* proportionnelles à leurs volumes.

17. On ne peut nier ces faits qu'après avoir ruiné entièrement les bases de raisonnement généralement adoptées par les physiciens, et qui sont d'accord avec tous les phénomènes observés ; mais, je le répete, dans l'hypothèse même où on les révoquerait en doute, on ne porterait aucune atteinte à la vérité des théories démontrées dans ce traité, lesquelles ne supposent point que certaines forces particulières, prises dans la nature, ayent entr'elles les rapports qu'on leur assigne, mais supposent seulement que ces rapports peuvent exister entre des forces en général.

18. On déduit immédiatement des vérités de *fait* de l'article 16 le moyen de rapporter les *pressions* dues à différents volumes d'une matière homogène à celle dont un volume donné de cette matière est capable. Dans le nouveau *Système métrique* français, on a pris pour terme de comparaison la pression due à un centimètre cube ou à la millionième partie d'un mètre cube d'eau distillée et considérée dans le vide, à son *maximum* de densité : ce maximùm, par une singularité remarquable, ne répond pas au degré de la congelation, mais a 4 degrés, au dessus de ce terme, mesurés sur le thermomètre centigrade. C'est là l'unité de *poids* que l'on a nommé *gramme*.

Les nombres exprimant les *pressions* dues à des volumes quelconques d'eau distillée et mise à + 4° de température, se déduisent donc immédiatement des rapports entre ces volumes et le volume d'un centimètre cube ; ensuite, au moyen de l'instrument appellé *balance* dont l'usage est de reconnaitre si des pressions sont égales, et qui sert, en même temps, à déterminer les corps entre lesquels cette égalité existe, on peut

rapporter au *gramme* la pression due à un corps quelconque, ou son *poids*, et c'est ce qu'on appelle *peser* un corps.

19. Il est manifeste que l'*effort*, par lequel nous tenons dans l'immobilité un corps pesant qui tend à descendre, a la même mesure que la *pression* contraire exercée par ce corps, et peut aussi, par conséquent, être exprimée en *grammes*; considérant enfin, que nous faisons pour empêcher un ressort plié de se débander, par arrêter l'émmersion d'un corps enfoncé dans un liquide et qui tend à surnager, pour tenir immobile un morceau de fer, attirer par un aimant, etc., des efforts absolument comparables à ceux dont nous avons besoin pour contrebalancer les *pressions* des corps pesants, (pressions que nous pouvons même substituer à nos efforts, soit dans la production des effets dont je viens de parler, soit lorsqu'il s'agit de faire *équilibre* à des *prsssions* dues à d'autres forces que la pesanteur) il est manifeste que toutes les *forces* de la nature peuvent être comparées entr'elles et mesurées en *grammes*, ou, en général, être rapportées à des unités de *poids*.

20. Je rappelle aux élèves qu'il n'est point question ici des corps ou des systèmes de corps animés de mouvements actuels; l'analyse des questions pour lesquelles il faut faire entrer en considération la mesure des forces de ces corps ou de ces systèmes, tient à une théorie que j'exposerai à la suite de cette première partie du cours de mécanique.

21. Enfin il est bon d'observer que l'évaluation de l'intensité d'une force se rapporte toujours à des considérations d'*équilibre*; et on verra par la suite, que cette remarque s'applique, non seulement aux forces de *pression* de l'espèce de celles dont il sera question dans ce traité, mais encore aux forces des corps en mouvement,

Du point d'application, de la ligne de direction et du sens de l'actiou d'une force; comment ces diverses choses s'expriment et se déterminent analytiquement.

22. La mesure de ce qu'on peut appeller l'*intensité* de la *force*, étant, par ce qui précède, ramenée à des notions précises, on a le principal élément de la connaissance des effets dont cette force est capable; mais ces effets dépendent encore de son point d'*application*, de sa ligne de *direction*, et du *sens* dans lequel elle agit sur cette ligne.

Toute force qui agit sur un corps, peut toujours être censée exercer son action sur un point déterminé de ce corps, et dans la direction d'une droite passant par ce point. Chaque fois que nous faisons usage de nos *forces* organiques, nous avons le sentiment très-distinct de la *direction* et du *sens* de l'action. La ligne de *direction* est celle sur laquelle le point d'application de la force se mouvroit s'il cédoit librement à l'impulsion que lui donne cette force; et si on considère, sur cette ligne droite, un point désigné par A, dont le mobile s'eloigneroit, et un autre point, désigné par B, dont il se raprocheroit, en se mouvant, on dit que la force qui le meut ou qui tend a le mouvoir agit dans le sens $A\,B$.

23. La *pondération*, a laquelle j'ai prouvé qu'on pouvoit ramener la mesure absolue de *l'intensité* d'une force quelconque, nous fournit aussi le moyen de lier a des idées simples et claires ce qui concerne le point *d'application*, la *direction* et le *sens* de l'action. Attachons au point A du corps M un fil parfaitement flexible et inextensible, faisons passer ce fil sur une poulie fixe (qu'on peut supposer infiniment petite) placée à un point B de l'espace, et tournant autour d'un axe horisontal perpendiculaire a la droite $A\,B$; enfin suspendons a l'extrémité C de ce fil un corps pesant dont le *poids* soit égal à P; ce poids P représentera l'*intensité* d'une force, qui pourrait être de nature quelconque, dont A serait le point d'*application*, AB la ligne de *direction*, et qui agirait dans le *sens* AB.

Figure I.

24. On peut, sans supposer aucun changement dans l'effet de la *force*, prendre à volonté, un des points de la ligne AB pour son point d'*application*; et je ferai voir, dans la suite de ce traité, comment une combinaison quelconque de forces appliquées à un corps ou à un système de corps, peut toujours être remplacée par une combinaison de *poids* disposés comme celui dont je viens de parler.

25. L'*intensité* d'une force qu'on introduit dans le calcul y est représentée par un signe qui désigne une quantité rapportée à un terme de comparaison fixe. Il s'agit, pour achever de représenter, sous tous les points de vue, le mode d'action de cette force, de rapporter a des expression analytiques qui ne laissent aucune équivoque, la position de son point *d'application*, celle de sa ligne de *direction* et le *sens* dans lequel elle agit sur cette ligne.

La première

La première de ces conditions est remplie quand on a introduit dans le calcul les trois coordonnées du point *d'application*. Concevons ensuite trois droites qui ayent une intersection commune a ce point, droites que j'appellerai axes des x', des y' et des z' et que je supposerai respectivement parallèles aux axes des x des y et des z; les x' positives se comptant du même coté par rapport au plan y' z' que les x positives par rapport au plan y z et ainsi des autres coordonnées correspondantes; si une droite commençant à l'origine des x', y', z' se dirige, a partir de cette origine, dans le *sens* suivant lequel agit la force qui y est appliquée, la position de cette ligne de direction et le *sens* de l'action de la force seront donnés par trois angles qui se mesureront par des arcs de cercle ayant leurs origines sur les x', y' et z' positives, se terminant à la ligne de *direction* dont je viens de parler, et se comptant *positivement* depuis leurs origines respectives jusqu'à cette ligne.

Je representerai, assez ordinairement, par la lettre α celui de ces angles qui se rapporte à l'axe des x' et par β, γ, respectivement, chacun de ceux qui sont rapportés aux axes des y' et des z'. Aucun de ces angles ne pourra excéder deux angles droits, et les arcs qui les mesurent étant supposés décrits avec des rayons égaux, se couperont en un même point de la ligne de *direction* de la force; si ce point est désigné par B et que A désigne l'origine des x', y', z' l'action de la force aura lieu dans le sens AB.

D'après ces conventions, le point *d'application* étant donné, il suffira, pour connoitre la position de la ligne de *direction* et le *sens* de l'action, de connoitre les signes respectifs des cosinus des angles α, β et γ. En effet le point *d'application* tendra nécessairement à se mouvoir dans celle des huit régions déterminées par les intersections des trois plans coordonnés sur lesquels je comptent les x', y' et z', qui se rapportera aux coordonneés de signes respectivement identiques avec ceux des cosinus des angles correspondants a ces coordonnées. Ainsi lorsque les trois cosinus seront positifs, la tendance au mouvement, du point d'application de la force, aura lieu dans la région des x', y' et z' positives; si cos. α est seul négatif, ou que α soit le seul angle obtus, cette tendance aura lieu dans la région des x' négatives et des y' et z' positives, etc., c'est ce dont on se rendra très-aisément raison, pour peu qu'on soit accoutumé à considérer des lignes dans l'espace.

26. Lorsque la ligne de direction se confondra avec un des axes des coordonnées x', y', z', deux des cossinus seront égaux à zéro, le 3me. aura pour valeurs $+1$ ou -1 et le *sens* de l'action sera déterminé par l'une ou l'autre de ces valeurs qui indiqueront, respectivement, si le point d'application tend à s'éloigner de l'origine du coté des coordonnées positives ou négatives.

27. On sait, par la *géométrie analytique*, que les équations de la ligne de direction, sont, a, b et c désignant, respectivement, les coordonnées de l'origine des x', y' et z' parallèles aux x y et z.

$$(y-b)\cos.\alpha=(x-a)\cos.\beta$$
$$(z-c)\cos.\alpha=(x-a)\cos.\gamma$$
$$(z-c)\cos.\beta=(y-b)\cos.\gamma$$

Deux de ces équations suffisent, comme on sait, pour déterminer la ligne dont il sagit, et on arrive au même but par les trois coordonnées du point d'application et deux angles seulement, l'un desquels pourroit être l'angle formé par la ligne de direction de la force et par le plan $x\,y$, l'autre étant formé par la projection orthogonale de cette ligne de direction sur le même plan $x\,y$ et par l'axe des x.

28 Si on désigne respectivement ces angles par les lettres φ et η on aura entre α, β, γ, φ, et η, les relations suivantes qui sont aussi démontrées dans les éléments de *géométrie analytique*.

$$\cos.\alpha=\cos.\eta\cos.\varphi$$
$$\cos.\beta=\sin.\eta\cos.\varphi$$
$$\cos.\gamma=\sin.\varphi$$

29. La somme des quarrés des seconds membres de ces équations est égale au quarré du rayon, pris pour unité, ce qui donne le théorême.

$$\cos^2.\alpha+\cos^2.\beta+\cos^2.\gamma=1.$$

Des différentes espèces de systêmes auxquels les forces peuvent être appliquées; équations de conditions relatives à ces systêmes.

30. Les effets des forces ne dépendent pas seulement de leurs *intensités*

et de leurs *directions*, mais dépendent aussi de la composition des corps et des systèmes de corps auxquels ces forces sont appliquées, et il est bien important, dans les problèmes d'équilibre et de mouvement, d'avoir égard à cette dernière circonstance.

On considère, dans un système soumis à l'action de forces quelconques, sa *forme* et la propriété qu'à cette forme d'être ou *invariable* ou *variable* suivant certaines lois.

Cette forme et les conditions d'après lesquelles elle peut varier s'expriment par des équations, qui, ainsi que nous le verrons, jouent un role important dans l'analyse des problèmes de mécanique.

31. On peut, par une abstraction de l'esprit, réduire un système à un point unique, qui est un point commun à toutes les lignes de direction des forces qui lui sont appliquées.

32. Après ce cas le plus simple vient celui d'un assemblage de plusieurs points sollicités chacun par une ou plusieurs forces et liés entr'eux de manière que leurs positions respectives sont invariables; un pareil système peut, ou être entièrement libre, ou avoir un seul point fixe, ou en avoir un nombre indéfini placés sur une même ligne droite, ou, enfin, en avoir plus de deux qui soient fixes sans se trouver sur une même droite. Dans ce dernier cas, le système ne peut pas être un moyen de transmission de l'action des forces; il peut l'être dans les trois premiers cas qui lui permettent différents mouvements, dont chacun comporte un mode particulier de transmission de l'action des forces.

33. Un système peut être aussi conçu comme composé de points liés les uns aux autres, de manière que leurs positions respectives puissent changer, les combinaisons possibles de ces changements étant assujetties à certaines conditions. Imaginons, par exemple, une suite de verges, ou lignes matérielles rigides, attachées à la suite l'une de l'autre, en forme de chaine, par des articulations qui permettent des flexions en tous sens; le système sera un poligone matériel, dont les côtés pourront ou être ou n'être pas dans le même plan, et on aura pour *conditions* de la composition de ce système *l'invariabilité* de longueur de chaque côté du poligone, et la *variabilité* arbitraire de chacun de ses angles. Si les articulations, au lieu de permettre des flexions dans tous les sens, les permettaient seulement autour d'axes placés d'une certaine manière par rapport aux cotés contigus, cette circonstance introduirait des *conditions*

particulières. Il faut, dans les problèmes relatifs à l'action des forces sur les systèmes, avoir égard à ces diverses *conditions*, et les introduire dans l'analyse.

Les systèmes, de l'espèce de ceux dont je viens de parler, peuvent, suivant leurs formes et leurs compositions, avoir plus de deux points fixes non compris dans une même droite, sans cesser d'être un moyen de transmission de l'actions des forces.

Enfin, un système d'une espèce quelconque, peut avoir un ou plusieurs points assujettis à se mouvoir sur des lignes ou des surfaces, ce qui donne encore lieu à des conditions particulières.

Objet particulier de la statique; division des matières comprises dans ce traité.

34. Nous pouvons maintenant, au moyen des considérations générales qui précèdent, nous faire une idée nette et précise de l'objet particulier de la *statique*.

J'ai donné, art. 3, l'énumération de ce qu'on peut appeller les matériaux primitifs de la mécanique; mais ces matériaux ne sont pas dès l'abord, employés tous ensemble; on les introduit graduellement, dans l'étude de la science, à mesure que les sujets de méditation se compliquent; ce sont leurs diverses combinaisons, ou aggrégations, qui distinguent et constituent les diverses parties de cette science; voici, en considérant les choses sous ce point de vue, à quoi se réduit la définition de la statique.

« Les effets et le mode d'action de la *force*, étant supposés restreints « aux cas qui ont été indiqués et expliqués art. 14 et suiv., la partie de la mé- « canique, qu'on nomme *statique*, donne des méthodes pour résoudre « tous les problèmes relatifs aux actions, ainsi définies, des *forces* sur « les corps, dans les cas où ces actions se contrebalancent et se dé- « truisent réciproquement, de manière qu'il en résulte *l'équilibre* et « l'immobilité du système auquel les forces sont appliquées. »

35. Cette manière d'envisager l'action des forces exclut d'abord toutes les quantités qui dépendent du *temps*; ensuite les corps ne devant avoir aucun mouvement actuel, et n'étant que de simples moyens de transmission des actions des forces, la *masse*, la *mobilité* et l'*inertie* sont en général étrangères aux déterminations relatives à ces actions.

36. Je parlerai cependant de quelques cas où la considération de la *masse* peut être admise avec le mode d'action défini aux articles ci-dessus cités, quoiqu'elle ne soit pas indispensable ; il en est d'autres, dont je parlerai aussi, dans lesquels le *temps* a une influence sur l'*intensité* des forces, et exige, par conséquent, qu'on ait égard à la durée de leur action ; mais ces différents cas sont simplement des sujets d'observations particulières, et on peut les laisser de coté dans l'exposition des fondements de la statique, et des méthodes auxquelles ils servent de base.

37. Ainsi la *statique* élémentaire ne suppose, à la rigueur, d'autres notions primitives que celles relatives aux *forces* ou *puissances* et aux *systêmes*, assujettis à certaines *conditions*, par l'intermède desquels ces forces se transmettent leurs actions. C'est d'après les diverses *conditions* de ces systêmes, que seront établies les divisions des matières que je me propose de traiter successivement.

La fin de cette première section sera consacrée à l'exposition complette de la théorie des forces appliquées à un même point; c'est le cas le plus simple du *systême* de forme invariable.

La seconde section comprendra la théorie des forces appliquées à un *systême étendu* et *figuré*, mais de forme invariable.

Je traiterai, dans la troisième section, de l'équilibre des *systêmes étendus* et *figurés*, et de formes *variables* ; la théorie de cet équilibre donne lieu à des recherches variées et difficiles, qu'on ne peut pas, à beaucoup près, épuiser dans un traité élémentaire.

Une quatrième et dernière section offrira l'application des principes établis dans les trois précédentes à l'équilibre des *machines* en faisant entrer en considération diverses circonstances physiques auxquelles il est indispensable d'avoir égard dans la pratique, telles que le *frottement*, la *roideur* des chaines et des cordes, etc.

Ce qu'on entend par *composition* et *décomposition* des forces, *résultantes* et *composantes*.

38. Lorsque plusieurs forces dont nous désignerons, d'après ce qui a été convenu précédemment art. 14 et suiv., les intensités respectives par P',

P'' etc. sont appliquées simultanément à un même point, il résulte de leurs actions cumbinées, une tendance de ce point a se mouvoir suivant une certaine direction, et cette direction est nécessairement unique, car un point ne peut pas suivre plusieurs lignes à la fuis. Or la ligne, suivant laquelle le point tend a se mouvoir et le *sens* de la tendance au mouvement étant supposés connus, on peut appliquer à ce point une *force* unique, que nous désignerons par R, agissant dans la même ligne de direction et dans le même *sens* et on peut, de plus, supposer à cette force une intensité telle qu'elle agisse sur le point d'application avec une énergie équivalente à celle qui résulte de l'action combinée des forces P', P'', etc.

Il suit de là que l'effet produit, sur le point d'application, par les actions combinées de P', P'', etc. ne changera point si, à ces forces, on substitue la force unique R; et que, réciproquement, la force R étant supposée d'abord appliquée au point dont il s'agit, on peut la remplacer par les forces P', P'', etc. sans rien changer à l'état de ce point.

39. La force R est ce qu'on appelle la *résultante* des forces P', P'', etc. et celles-ci sont les *composantes* de la première. Lorsqu'on déduit, par les règles que je donnerai bientôt, la *résultante* des *composantes*, cette opération se nomme *composition* des forces P', P'', etc. L'opération inverse, celle qui consiste à trouver plusieurs forces dont les actions combinées produisent le même effet que la force unique R, se nomme *décomposition* de la force R.

40. On peut, sans connaître les règles de la composition et de la décomposition des forces, affirmer d'avance que si, en conservant l'intensité et la ligne de direction de la *résultante* R, on la fait agir, sur cette ligne, en sens contraire de celui dans lequel elle doit agir pour remplacer les forces P', P'', etc. elle annullera alors, ou pourra annuller l'effet de ces forces, c'est-à-dire leur faire *équilibre*. La vérité de cette proposition est manifeste, car, d'après les définitions de l'art. 39, elle se réduit à dire qu'une force R fait équilibre à une autre force R, lorsque ces deux forces, de même intensité, agissent, en sens opposés, leurs directions respectives étant sur une même droite.

Cette remarque suffit pour faire voir comment la théorie de la composition des forces est liée à celle de leur équilibre.

Je vais exposer cette théorie en commençant par le cas le plus simple, celui de deux forces appliquées à un même point.

Composition de deux forces appliquées à un même point.

41. Une question quelconque de *statique* éxige la considération de deux forces au moins, et j'observerai, en passant, que cette circonstance établit une première distinction entre la partie de la mécanique, qui traite de l'équilibre, et celle qui traite du mouvement. En effet, dès qu'un corps est animé d'un mouvement actuel, soit que ce phénomène résulte de l'action d'une, ou de plusieurs forces, on a, par le fait même de ce mouvement, des relations entre les espaces parcourus et les temps, qui pouvant être modifiées d'un nombre infini de manière, fournissent déja des formules générales et un algorithme qui sont du plus grand usage dans tous les problêmes de mouvement.

42. Les élèves se rappelleront que, d'après les notions données, depuis l'art. 13 jusqu'à l'art. 21, sur la comparaison des forces, dire qu'une force P est égale à n fois une force Q, c'est dire que cette force P est capable de contre-balancer ou de rendre sans effet les actions simultanées de n forces, dont chacune serait égale à Q et agirait dans la même ligne de direction que P, n ne se trouvant point, d'ailleurs, assujettie a être un nombre entier, ils se rappelleront, encore, que les théories à établir sur ces notions sont entièrement indépendantes du choix du module absolu des forces, et des moyens *physiques* employés pour leurs comparaisons.

Ces préliminaires posés, je commence par le cas le plus simple de la composition de deux forces, celui où on suppose que leurs directions sont sur une même droite; il est évident, que, dans ce cas, la composante des deux forces est égale à leur somme ou à leur différence, respectivement, suivant qu'elles agissent dans le même sens ou dans des sens opposés.

43. Passant au cas de deux forces dont les lignes de direction se coupent et qui sont censées, toutes deux, appliquées au point d'intersection de ces lignes, on peut, d'abord, affirmer; 1°. que la ligne de direction de la résultante passe par le point commun d'application des deux composantes, ce qui est évident; 2°. que cette même ligne est

dans le plan qui renferme les lignes de direction de ces mêmes composantes. On emploie, pour prouver cette seconde proposition, un genre de raisonnement particulier, qui est démonstratif lorsqu'on est sur de faire entrer, complétement, en considération tous les éléments d'une question.

Cette certitude est parfaitement acquise dans le cas dont il sagit ici, car il est manifeste qu'il n'existe d'autres données pour déterminer la résultante, que l'intensité de chacune des forces composantes, et l'angle qu'elles font entr'elles (*). Or si la ligne de direction de la résultante pouvait avoir une position quelconque par rapport aux lignes de direction des composantes, sans avoir sa trace dans leur plan, on le démontrerait par un raisonnement exclusivement fondé sur les données dont je viens de parler, dans lequel ces données seraient employées d'une certaine manière; mais on peut toujours, par le point d'application des forces, faire passer deux lignes qui, de part et d'antre du plan des composantes, aient des positions symétriques par rapport à ce plan et aux directions des composantes; le même raisonnement, le même emploi des données s'appliquerait indistinctement à l'une et l'autre des deux positions symétriques, d'où on est en droit de conclure, la position de la ligne de direction de la résultante, devant être unique, qu'elle n'a point sa trace hors du plan des composantes et qu'elle est, par conséquent, dirigée dans ce plan.

44. Le problème de la détermination de la résultante, se réduit donc à trouver la trace de sa direction, sur le plan des composantes, et son intensité. La première partie du problème est résolue pour un cas particulier, celui de deux forces égales. Dans ce cas, la ligne de direction de la résultante partage, en deux parties égales, l'angle formé par les directions des deux composantes, et on le prouve par un raisonnement semblable à celui que j'ai employé dans l'article précédent. En effet, P et Π étant les deux composantes égales, et $2\,\alpha$ l'angle compris entre

(*) Dorénavant, pour abréger l'énonciation, je dirai, *l'angle formé par deux forces*, l'angle formé *par une force et par une ligne*, au lieu de dire, l'angle formé par *les directions de deux forces*, *par la direction* d'une force et par une ligne, etc. Ainsi ces expressions, *forces qui font entr'elles un angle A*, *forces paralleles*, etc. équivaudront à celles-ci; forces *dont les directions* font entr'elles un angle A, forces *dont les directions* sont paralleles, etc.

leurs

leurs directions, si la résultante pouvait faire, avec la composante P, un angle δ, plus petit que α, le même raisonnement qui prouverait l'existence de cet angle, prouverait aussi que la même résultante fait le même angle δ avec l'autre force Π, la totalité des données de la question s'appliquant, exactement de la même manière, à l'une et l'autre proposition; donc la résultante, qui doit être unique, ne peut être dirigée ni d'un coté ni de l'autre de la ligne qui divise l'angle 2α en deux parties égales, donc sa trace se confond avec celle de cette ligne. Quant au *sens* de l'action, il n'est jamais équivoque.

Il ne s'agit donc plus, dans le cas particulier dont je viens de parler, que de trouver l'intensité de la résultante que je désignerai par R. Cette résultante dépend uniquement des deux forces égales P et Π, et de l'angle 2α compris entre leurs directions, ainsi on doit avoir $R = \textit{fonction}\ (P, \alpha)$ et, en divisant les deux membres de cette équation par P, on a $\frac{R}{P} = \frac{f(P, \alpha)}{P}$, en prenant f pour signe de fonction, et j'observe d'abord que le second membre de cette équation ne doit plus renfermer P, ou que cette quantité P doit s'en éliminer d'elle même. En effet, $\frac{f(P, \alpha)}{P}$ ne contenant pas R, si P se trouvait encore dans cette expression, on changerait la valeur numérique de $\frac{f(P, \alpha)}{P}$ en changeant seulement l'unité des forces, ou le terme commun de comparaison auquel on rapporte P et R, quoique les valeurs absolues de P, R et α restassent les mêmes; mais le changement d'unité de forces n'a aucune influence sur le nombre qui exprime le rapport $\frac{P}{R}$, auquel l'expression $\frac{f(P, \alpha)}{P}$ doit être égale; il est donc impossible que cette expression puisse, par un changement d'unité de force, avoir différentes valeurs numériques tandis que P, R et α demeurent constants en quantités absolues, sans supposer, que son égale $\frac{P}{R}$ est en même temps constante et variable; car cette condition ab-

surde devroit avoir lieu si P entrait dans la valeur de $\frac{R}{P}$; donc $\frac{f(P,\alpha)}{P}$ ne contient pas P et est une fonction de α seul, c'est-à-dire qu'on a, $\frac{R}{P}=f(\alpha)$. ou

$$R=Pf(\alpha)\dots\dots\dots(1)$$

$f(\alpha)$ étant une fonction de dimension nulle ou un nombre abstrait égal au rappot entre R et P.

Soient AP et $A\Pi$, respectivement, les directions et les *sens* des actions des forces égales P et Π et $PA\Pi$ l'angle compris entre ces directions, que j'ai désigné par 2α ; AR que je suppose diviser l'angle $PA\Pi$ en deux parties égales et former, par conséquent, un angle $=\alpha$ avec chacune des lignes AP et $A\Pi$ sera la direction et le *sens* de l'action de la résultante.

Fig. 2. Traçons, de part et d'autre de AP, les droites Ap, Ap', faisant chacune un angle ω avec AP, traçons, de même, de part et d'autre de $A\Pi$, les droites $A\pi$, $A\pi'$ faisant aussi chacune, avec $A\Pi$, le même angle ω ; enfin imaginons quatre forces égales entr'elles, dirigées suivant les lignes Ap, Ap', $A\pi$, $A\pi'$, et d'intensités telles que P soit la résultante des forces égales dirigées suivant Ap et Ap', ce qui suppose que Π est aussi la résultante des forces égales dirigées suivant $A\pi$ et $A\pi'$. On aura, d'après le théorème énoncé par l'équation (1), et en désignant, par Q, l'une quelconque des quatre forces égales dont je viens de parler, $P=Qf(\omega)$, valeur qui substituée dans l'équation (1) donne

$$R=Qf(\alpha)f(\omega)\dots\dots\dots(2)$$

La résultante des forces Q dirigées suivant les lignes Ap' et $A\pi'$, qui font le même angle avec AR, doit se trouver sur la ligne AR ; donc en désignant cette résultante par R' on a $R'=Qf(\textit{angle } RAp')$, ou

$$R'=Qf(\alpha-\omega)\dots\dots(3)$$

on trouvera de même pour la résultante des forces Q agissant dans les directions Ap et $A\pi$, et en faisant cette résultante $=R''$

$$R''=Qf(\alpha+\omega)\dots\dots(4).$$

L'action de la force R équivaut à celles des forces P et Π, les actions

de ces deux dernières équivalent à celles des quatres forces Q, lesquelles peuvent être remplacées par R' et R'', on a donc, trois forces R, R', R'', telles qu'on peut substituer la première aux deux dernières et réciproquement, et comme ces forces agissent dans le même sens, R doit être égal à $R' + R''$, ce qui donne

$$f(\alpha)f(\varpi) = f(\alpha - \varpi) + f(\alpha + \varpi) \;\ldots\ldots\; (5)$$

équation de laquelle il faut déduire $f(\alpha)$. J'observe, d'abord que les quantités α et ϖ sont absolument indépendantes l'une de l'autre c'est-à-dire ne doivent être liées entr'elles par aucune relation, l'angle ϖ ne dépendant que de la valeur de Q qui est entièrement arbitraire. On voit aisément, d'après cette observation, que la détermination de $f(\alpha)$ deviendrait facile si on avait une équation entre α et ϖ dans laquelle ces quantités fussent séparées, et c'est à quoi je parviens en retranchant la différentielle seconde de l'équation (5), prise par rapport à α, de sa différentielle seconde prise par rapport à ϖ ce qui donne $f''(\alpha)f(\varpi) - f(\alpha)f''(\varpi) = 0$, ou,

$$\frac{f''(\alpha)}{f(\alpha)} = \frac{f''(\varpi)}{f(\varpi)} \;\ldots\ldots\; (6)$$

d'après l'indépendance, que j'ai fait observer plus haut, entre α et ϖ, l'un quelconque des deux membres de cette équation peut demeurer constant, quelque valeur qu'on donne à la variable contenue dans l'autre membre, d'où il suit que l'un et l'autre membre sont nécessairement des quantités cons^{tes}.; ainsi on a, q étant une cons^{te}., $\frac{f''(\alpha)}{f(\alpha)} = \frac{f''(\varpi)}{f(\varpi)} = q$,

$$\frac{d^2 f(\alpha)}{(d\alpha)^2} = q f(\alpha) \;\ldots\ldots\; (7)$$

Cette équation, linéaire du 2eme. ordre, donne pour la valeur de $f(\alpha)$ (*calcul intégral de Lacroix art. 280* (*))

$$f(\alpha) = A e^{\alpha\sqrt{q}} + B e^{-\alpha\sqrt{q}} \;\ldots\ldots\; (8)$$

(*) Les citations de cet ouvrage, répandues dans le cours de mon traité de mécanique, se rapportent toutes à l'édition *in-8°*. de 1806.

A et B étant deux constantes, et e la base du système des logarithmes népériens.

La fonction désignée par f étant ainsi déterminée, on a, en appliquant cette détermination à l'équation (5) et rassemblant les termes multipliés par $1-A$ $1-B$

$$\left.\begin{array}{l}(1-A)\left\{e^{(\alpha+\omega)\sqrt{q}}+\frac{B}{A}e^{-(\alpha-\omega)\sqrt{q}}\right\}\\+(1-B)\left\{e^{(\alpha-\omega)\sqrt{q}}+\frac{B}{A}e^{-(\alpha+\omega)\sqrt{q}}\right\}\end{array}\right\}=0$$

d'après l'indétermination absolue des rapports entre les quantités α et ω cette équation doit être satisfaite indépendamment de toute valeur particulière de ces quantités, ce qui ne peut avoir lieu qu'en faisant $1-A=0$ et $1-B=0$; et en effet si on supposait à A et B des valeurs différentes de l'unité, toute valeur déterminée de α se trouverait liée, par l'équation précédente, à une valeur déterminée de ω, et réciproquement, ce qui est contraire à l'état de la question.

Les valeurs $A=1$ et $B=1$ changent l'équation 8 en

$$f(\alpha)=e^{\alpha\sqrt{q}}+e^{-\alpha\sqrt{q}}$$

or on a, par les formules de trigonométrie, $2\cos.(z\sqrt{-1})=e^{z}+e^{-z}$

ou en supposant $z=\alpha q^{\frac{1}{2}}$, $2\cos.(\alpha\sqrt{-q})=e^{\alpha\sqrt{q}}+e^{-\alpha\sqrt{q}}$; donc

$$f(\alpha)=2\cos.(\alpha\sqrt{-q}) \quad \ldots\ldots (9)$$

et cette valeur substituée dans l'équation (1), $R=Pf(\alpha)$ donne

$$R=2P\cos.(\alpha\sqrt{-q}) \quad \ldots\ldots (10)$$

pour déterminer la constante q je suppose $\alpha=\frac{1}{2}\pi$, en désignant par π la demi circonférence dont le rayon $=1$; dans ce cas l'angle $\Pi AP=2\alpha=\pi$, et les deux composantes égales P et Π étant, directement opposées se font équilibre, au moyen de quoi leur résultante est nulle. On a donc $R=0$, d'où $\cos.(\frac{\pi}{2}\sqrt{-q})=0$, ce qui suppose $\frac{\pi}{2}\sqrt{-q}=(2n+1)\frac{\pi}{2}$

(n étant un nombre entier quelconque) $q = -(2n+1)^2$ et $R = 2P \cos. [(2n+1)\alpha]$

R, considéré sous le point de vue purement analytique, peut, ainsi, avoir une infinité de valeurs, mais, parmi toutes ces valeurs, il n'y en a qu'une d'applicable à la question particulière qui nous occupe, celle qu'on obtient en faisant $n=0$; toute autre hypothèse sur n donnerait des résultats inadmissibles, car en supposant que l'angle 2α formé par les directions des forces fût égal à $\frac{\pi}{(2n+1)}$, on aurait

$$R = 2P \cos. \frac{\pi}{2} = 0, \text{ pour } n = \pm 1,\ n = \pm 2,\ n = \pm 3, \text{ etc.}$$

et on serait conduit à dire que deux forces égales et dont les directions ne se trouveraient pas sur une même droite, pourraient avoir une résultante nulle ou se faire équilibre, ce qui est une proposition absurde, le seul moyen de rendre nulle l'action combinée de ces forces étant de les faire agir en sens contraire, et $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, étant la seule valeur qui remplisse cette condition.

Faisant donc $n=0$, on a ultérieurement,

$$R = 2P \cos. \alpha$$

45. Si on représente les forces P et Π par les lignes AP et $A\Pi$ prise sur leurs directions, c'est-à-dire si on fait ces lignes égales respectivement, à autant d'unités *linéaires* que P et Π contiennent d'unités de forces, la résultante R devra être représentée, sur la ligne AR, par une longueur qui ait avec les longueurs AP et $A\Pi$ les mêmes rapports qu'a la force R avec les forces P et Π; cette longueur sera donc égale à $2AP \times \cos. PAR$ c'est-à-dire à la diagonale AR du parallélogramme ou losange $APR\Pi$ construit sur AP et $A\Pi$. Fig. 3

46. Cette manière de représenter des forces par des lignes prises sur leurs directions, et proportionelles aux intensités de ces forces, est d'un usage général, en mécanique, et je l'employerai dans tout le cours de ce traité.

47. Je passe au cas où les deux forces qu'on veut composer en une seule, sont inégales et forment entr'elles un angle droit. Soient P et

Q ces deux forces agissant dans les sens AP et AQ et representées respectivement par les lignes AP et AQ; j'achève le parallélogramme rectangle $PAQR$ et je trace les deux diagonales AR et PQ; je mène DAB, parallèle à PQ, rencontrée aux points D et B par les parallèles PD et QB à AR. Cette construction me donne deux losanges semblables et égaux $DACP$ et $CABQ$ dont la petite et la grande diagonale sont, respectivement, la force AP et la force AQ. Or d'après ce qui est démontré (art. 44) on peut, à la force AP, substituer les forces AD et AC, et, à la force AQ, substituer les forces AB et AC; les forces AB, AD et $2\ AC$ peuvent donc remplacer les forces AP et AQ; mais les deux premières AB et AD étant égales et agissant en sens contraires sur une même ligne, se détruisent réciproquement, et il reste la force $2\ AC$, ou la force AR, qui, seule, peut, remplacer les forces AP et AQ; donc la résultante de ces forces est représentée par la diagonale du parallélogramme dont les côtés représentent leurs intensités.

Fig. 3

48. J'arrive enfin, au cas le plus général de la composition de deux forces appliquées à un même point, savoir, le cas où ces forces sont inégales et forment entr'elles un angle quelconque.

Soient AP et AQ des lignes qui représentent ces forces, lesquelles agissent dans les sens AP et AQ; je construis le parallélogramme $APRQ$, et, après avoir tracé la diagonale AR, je lui mène les perpendiculaires PC et QE, et j'achève les parallélogrammes rectangles $ADPC$ et $ABQE$. Il suit de l'art. 47 que la force AP peut être remplacée par des forces AD et AC, et que la force AQ peut être remplacée par AB et AE; donc les deux forces AP et AQ peuvent être remplacées par les quatre forces AD, AB, AC, et AE; mais les deux forces AD et AB se détruisent parcequ'elles sont égales et qu'elles agissent en sens contraires, et il ne reste que les forces AC et AE, agissant dans le sens AR, qui peuvent, seules remplacer les forces AP et AQ.

On a $AC + AE = AR$ donc les deux forces AC et AE, agissant dans le même sens AR, se composent en une seule égale à la diagonale AR, qui représente, ainsi, la résultante des forces P et Q, lorsque les intensités de ces forces sont représentées par les côtés AP et AQ du parallélogramme $PAQR$.

49. Les propositions que je viens de démontrer conduisent au théorème suivant qui est le fondement de toutes les théories mécaniques.

« Si deux forces quelconques, P et Q, dont les directions forment « entr'elles un angle quelconque, sont appliquées à un même point, « et qu'on représente leurs intensités respectives par des lignes prises « sur leurs directions, la diagonale du parallélogramme, construit sur « ces lignes, représentera la résultante des forces P et Q »

Ce théorême est connu sous le nom de théorême du *parallélogramme des forces.*

50. On voit que les relations entre les deux composantes AP, AQ et leur résultante AR sont les mêmes que celles qui existent entre les trois côtés du triangles APR qui est semblable et égal au triangle AQR. D'après cela désignant par ρ' et ρ'', respectivement, l'angle que chacune des composantes P et Q fait avec la résultante R, par τ l'angle que ces deux composantes font entr'elles, et observant que l'angle AQR, ou son égal APR, à le même sinus que son supplément PAQ, on a, par le théorême connu de trigonométrie,

$$P : Q : R :: \sin. \rho'' : \sin. \rho' : \sin. \tau$$

51. Un autre théorême de trigonométrie donne le moyen de déduire, immédiatement, la valeur de la résultante de celles des composantes, en ne connaissant, des trois angles ρ', ρ'' et τ, que l'angle τ formé par les deux composantes; on a pour calculer cette valeur, en observant que le cosinus d'un angle ne diffère de celui de son supplément que par le signe, l'équation,

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos. \tau$$

Décomposition d'une force en deux autres; indétermination du problème; cas où les directions des composantes sont à angle droit l'une sur l'autre. Décomposition d'une force en trois autres dont l'une quelconque est perpendiculaire au plan qui renferme les directions des deux autres. Indépendance des composantes rectangulaires.

52. Le problème de la composition, en une seule, de deux forces appliquées à un même point, et dont les directions et les intensités sont données, est toujours déterminé, mais il n'en est pas de même du problême où l'on propose de substituer deux forces à une seule; en général, puisqu'il

existe, art. 50 et 51, entre les six qantités P, Q, R, ρ', ρ'' et τ les mêmes relations qu'entre les côtés et les angles d'un triangle rectiligne, il faut, nécessairement, pour que ces six quantités soient déterminées, que trois d'entr'elles soient données.

Quelque soit la combinaison des données et des inconnues, parmi les six quantités P, Q, R, ρ', ρ'' et τ, si les données sont en nombre suffisant, on a, pour calculer les trois inconnues, deux équations fournies par les proportions de l'art. 50, et l'équation de l'art. 51. Les proportions de l'art. 50 donnent trois équations, mais l'une quelconque de ces trois est une conséquence des deux autres. Au reste on peut employer pour déduire, dans chaque cas, par le moyen le plus simple, les inconnues des données, toutes les ressources que fournit la trigonométrie rectiligne.

53. D'après ce qui précède, si on se propose, pour condition unique, de décomposer une force R en deux autres, deux des cinq quantités P, Q, ρ', ρ'', τ, sont arbitraires, et on a trois équations pour déterminer les autres quantités.

Mais si on ajoute à la condition dont je viens de parler, celle d'avoir deux composantes dont les directions soient à angle droit l'une sur l'autre, alors $\sin.\tau = 1$, $\sin.\rho'' = \cos.\rho'$ et les proportions de l'art. 50 deviennent

$$P : Q : R :: \cos.\rho' : \sin.\rho' : 1$$

d'où . . . . $P = R\cos.\rho'$; $Q = R\sin.\rho'$;
tout est déterminé dès qu'on se donne deux des quantités R, P, Q et ρ'.

54. Les deux équations précédentes fournissent le théorême suivant;
« Une force R et l'angle qu'elle fait avec un axe donné de position
« étant connus, ses deux composantes, parallèle et perpendiculaire à
« cet axe, sont respectivement égales aux produits de cette force par
« le cosinus et le sinus de l'angle donné. »

Il est important que les élèves se fixent bien, dans la mémoire, ce théorême dont les applications reviennent à chaque instant dans l'analyse des problêmes de mécanique.

55. La décomposition d'une force en composantes rectangulaires doit, à plus forte raison, fixer l'attention lorsqu'on la généralise en l'étendant au cas de trois dimensions, car elle conduit alors à un théorême fondamental auquel se trouve liée toute la mécanique analytique.

Soit

Soit une force P dont le point d'application et la direction sont rapportés à trois plans coordonnés, et proposons-nous de trouver trois forces respectivement parallèles aux axes des x, des y et des z, qui, appliquées au même point que la force P, puissent être substituées à cette force. Je nomme ϕ et η, respectivement, l'angle formé par la direction de cette force et par le plan des xy, et l'angle formé par la projection de cette direction sur le plan xy et par l'axe des x.

Les deux composantes de P, respectivement parallèles et perpendiculaires à l'axe des z sont, art. 54, P sin. ϕ et P cos. ϕ; cette dernière composante, parallèle au plan xy, donne, elle même, deux autres composantes parallèles à l'axe des x et à l'axe des y, dont les valeurs respectives sont, art. cité, P cos. ϕ cos. η et P cos. ϕ sin. η, et qui avec la force P sin. ϕ satisfont aux conditions demandées.

56. Il est convenable de substituer aux angles ϕ et η les angles α, β et γ formés, respectivement, par la direction de la force P et par les axes des x, des y et des z. On a, pour cette substitution, les formules citées art. 28, au moyen desquelles on trouvera que les composantes de P, respectivement parallèles aux x, aux y et aux z, sont

$$P \text{ cos. } \alpha\, ; \; P \text{ cos. } \beta\, ; \; P \text{ cos. } \gamma.$$

57. Le théorême précédent est celui que j'ai annoncé, art. 55, en faisant pressentir son extrême importance dans la Mécanique analytique; il est bon, pour commencer à fixer l'attention des élèves sur les avantages de la décomposition d'une force en trois composantes rectangulaires, de leur faire observer qu'une force ne pouvant exercer d'action dans le sens d'aucune ligne tracée sur un plan perpendiculaire à sa direction, il résulte, de là, une propriété de cette espèce de décomposition, qui consiste en ce que l'effet de l'une quelconque des trois composantes rectangulaires P cos. α, P cos. β, P cos. γ, considéré parallelement au plan qui renferme les deux autres, est absolument nul; c'est ce qu'on pourrait appeler l'*indépendance* entre ces trois composantes.

L'*indépendance* dont je viens de parler est, comme je l'ai dit, la conséquence de ce qu'une force n'est capable de donner, à un point matériel, aucune tendance au mouvement dans un plan perpendiculaire à sa direction; cette proposition manifeste est liée à toutes les vérités précédemment démontrées, mais on peut s'en rendre raison, immédiatement, de la manière suivante; supposons que le point matériel soit renfermé et assujetti à se mouvoir entre deux plans parallèles et infi-

niment près l'un de l'autre, si la force perpendiculaire aux deux plans, qui sollicite ce point matériel, pouvait lui donner du mouvement entre les enveloppes planes qui le contiennent, elle lui donnerait ce mouvement dans une direction déterminée; mais vu l'égalité entre les angles que fait la ligne de direction de la force sollicitante avec toutes les droites qu'on peut tracer sur les enveloppes planes en les faisant passer pour le point d'application de la force, le même raisonnement par lequel on prétendrait prouver que le point matériel doit suivre une de ces droites s'appliquerait également à toutes les autres; donc le point matériel n'en suivra aucune.

Tout se passera différemment si la force sollicitante n'est pas perpendiculaire aux enveloppes planes; on pourra, alors, la décomposer en deux forces rectangulaires, appliquées au point matériel, l'une perpendiculaire et l'autre parallèle aux enveloppes planes; la première ne pourra, par ce qui vient d'être démontré, donner aucun mouvement actuel au point matériel, l'autre, au contraire jouira, pour le mouvoir, de son énergie entière.

J'ajouterai, pour terminer ce que j'ai à dire sur cette matière, que les angles α, β et γ, formés par la direction d'une droite, et par les axes coordonnés, n'étant, en général, liés entr'eux que par une seule équation, il y a toujours deux de ces angles dont les variations sont indépendantes, s'il n'existe pas de conditions particulières; pour se rendre raison de cette indépendance par des considérations géométriques, on peut prendre un point de la droite dont il s'agit, pour origine des x', y', z', et pour sommet d'un cône dont l'apothême ferait un angle α avec l'axe des x', lequel serait, en même temps, l'axe du cône; on voit que cette droite, peut, en faisant constamment l'angle α avec l'axe des x', faire avec chacun des deux autres axes coordonnés tous les angles compris entre $\frac{1}{2}\pi-\alpha$ et $\frac{1}{2}\pi+\alpha$; l'inclinaison sur un de ces axes, détermine l'inclinaison sur l'autre, ainsi les variations de deux de ces trois quantités α, β, γ, comme celles de deux des trois coordonnées d'une surface courbe, ne sont liées entr'elles que lorsqu'une de ces quantités est supposée constante.

58. Dans le cas où la force à décomposer serait parallèle à un des plans coordonnés, les trois valeurs de ses composantes, art. 56, se réduiraient aux deux valeurs fournies par le théorème de l'art. 54, un des cosinus devenant égal à zéro, et les angles, auxquels les deux cosinus restants appartiennent, devenant compléments l'un de l'autre.

59. Il est bon de remarquer que si on construit un parallélipipède rectangle dont trois arêtes, respectivement parallèles aux x, aux y et aux z, et ayant leurs intersections au point d'application de la force P, représentent en quantité et en direction, les composantes P cos. α, P cos. β, P cos. γ, la force P sera représentée en quantité et en direction, par la diagonale de ce parallélipipède; car les rapports de la diagonale aux côtés du parallélipipède étant, $1 : \cos. \alpha$; $1 : \cos. \beta$, $1 : \cos. \gamma$, en multipliant par P les deux termes de chacun de ces rapports, on obtient ceux qui existent entre la résultante et ses trois composantes.

Composition et décomposition de plusieurs forces appliquées à un même point, quelques soient le nombre, les intensités et les directions de ces forces.

60. Lorsque plusieurs forces qu'on veut composer en une seule ont leur direction sur une même droite, la résultante unique est égale à la somme des composantes, qui agissent dans un sens moins la somme des composantes qui agissent dans le sens opposé; en effet A', A'' ect. étant les forces qui agissent dans un sens, et $B' + B'' +$ ect. celles qui agissent dans le sens contraire, on peut, d'après l'art. 42, en les composant deux à deux, remplacer toutes ces forces par une force $P = A' + A'' +$ etc. et une force $Q = B' + B'' +$ etc. dont la résultante sera $P - Q$.

61 Dorénavant le mot *somme*, lorsqu'il s'agira de forces dont les directions se trouveront sur une même droite, désignera la quantité $P - Q$, c'est-à-dire $(A' + A'' + \text{etc.}) - (B' + B'' + \text{etc.})$ c'est une énonciation abrégée analogue à celle qu'on emploie en algèbre lorsqu'on dit que la somme des termes a et $-b$ est égale à $a - b$, ou qu'on fait l'aggrégation d'un nombre quelconque de termes en ayant égard à leurs signes.

62. On a un moyen immédiat de composer, en une seule, plusieurs forces formant des angles entr'elles, et appliquées à un même point; c'est celui d'en composer, d'abord, deux dont la résultante se compose ensuite, elle-même, avec une troisième force, pour donner une seconde résultante qui remplace les trois forces, et que l'on combine avec une quatrième force, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait fait un nombre $n - 1$ de compositions, n étant le nombre des forces à composer.

63. Mais cette méthode est longue et embarrassante, le théorême de

l'art. 56 en fournit une infiniment préférable qui donne les valeurs cherchées, par des formules extrêmement commodes et faciles à retenir.

Soient les forces P', P'', P''' etc. appliquées à un même point ; les angles respectifs formés par ces forces et par les axes coordonnés sont, pour l'axe des x : α', α'', α''' etc. ; pour l'axe des y : β', β'', β''' etc. ; pour l'axe des y : γ', γ'', γ''' etc.

Je décompose chacune de ces forces en trois autres, respectivement parallèles aux x, aux y et aux z ; réunissant ensuite les composantes parallèles aux x, je représente leur somme par X, (le mot *somme* désignant ici, conformément à l'énonciation convenue art. 61, la différence entre la somme des quantités positives et celle des quantités négatives) et j'ai l'équation

$$X = P' \cos.\ \alpha' + P'' \cos.\ \alpha'' + \text{etc.}$$

les forces, dont les valeurs entrent dans le 2ème. membre de cette équation, ont toutes leurs direction sur une même droite parallèle aux x, et les sens de leurs actions, sur cette ligne, sont donnés art. 25 et 26, par les signes des cosinus ; on peut donc, art. 60, remplacer toutes ces forces par une seule égale à la somme de celles qui agissent dans un sens, moins la somme de celles qui agissent dans le sens opposé, et cette force unique est X.

En désignant, pareillement, par Y et Z, respectivement, les sommes des composantes parallèles aux axes des y et des z on a

$$Y = P' \cos.\ \beta' + P'' \cos.\ \beta'' + \text{etc.}$$

$$Z = P' \cos.\ \gamma' + P'' \cos.\ \gamma'' + \text{etc.}$$

et toutes les forces à composer en une seule se trouvent ramenées aux trois forces rectangulaires X, Y, Z ; la composition de ces trois forces donnera donc la résultante demandée.

64. Soient P cette résultante, et α, β, γ, les angles respectifs formés par sa direction et par les axes des x des y et des z on a, art. 56

$$P \cos.\ \alpha = X$$

$$P \cos.\ \beta = Y$$

$$P \cos.\ \gamma = Z$$

65. Il faut réunir ces équations à celle de l'art. 29, pour déterminer les quatre inconnues P, α, β et γ, dont les valeurs sont données par les équations suivantes

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

$$\cos.\ \alpha = \frac{X}{P};\ \cos.\ \delta = \frac{Y}{P};\ \cos.\ \gamma = \frac{Z}{P}.$$

66. *a, b* et *c* désignant les coordonnées du point commun d'application des forces, on aura les équations de la ligne de direction de la résultante en substituant, dans les équations de l'art. 27, à cos. *a*, cos. *b* et cos. γ les valeurs qu'on vient de trouver, et comme *P* se trouve diviseur commun, il suffit de remplacer ces cosinus, respectivement, par *X*, *Y* et *Z*.

67. S'il s'agit de décomposer une force *P*, dont le point d'application, l'intensité et la direction sont donnés, en plusieurs autres forces P', P'' ect. dirigées sur son point d'application, on tombera dans une indétermination de l'espèce de celle dont il a été parlé art. 52. En effet les forces P' P'' etc. étant supposées en nombre *n*, et la direction de chacune de ces forces dépendant de deux angles au moins, (ou de trois angles liés entr'eux par une équation) on a un nombre 3 *n* de quantités à introduire dans les seconds membres des trois équations de l'art. 64, les premiers membres de ces équations étant, dans le cas dont il s'agit, les données du problême; et comme, par la nature de ce problême, les trois équations de l'article cité sont les seules qu'on ait entre les inconnues et les données, il faut, si le nombre de ces équations est insuffisant, ou déterminer *à priori* une partie des inconnues, ou avoir entr'elles des équations de condition, qui dépendent toujours de circonstances particulières à chaque question.

68. Lorsque les forces à composer ou à décomposer doivent agir dans le même plan, qu'on peut, sans nuire à la généralité des determinations, supposer être le plan des *x y*, les équations des art. 60 et 61 deviennent les suivantes

$$P \cos.\ \alpha = P' \cos.\ \alpha' + \text{ect};\ P \sin.\ \alpha = P' \sin.\ \alpha' + \text{ect.}$$

dans lesquelles on regardera comme inconnues ou les premiers ou les seconds membres, suivant qu'on aura à faire une composition ou une décomposition de forces.

69. Faisant $P' \cos.\ \alpha' + \text{etc.} = X$ et $P' \sin.\ \alpha' + \text{etc.} = Y$, on a pour remplacer les équations de l'art. 65, dans le cas dont je viens de parler

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2};\ \cos.\ \alpha = \frac{X}{P}.$$

Conditions de l'équilibre entre plusieurs forces agissant sur un même point *libre*, quelques soient le nombre, les intensités et les directions de ces forces.

70. **Cette expression point *libre*** désigne un point qui, dans le cas où il changerait de position, ne serait pas assujetti à se mouvoir sur une ligne ou sur une surface, mais pourrait prendre, dans l'espace, une direction quelconque. la définition que je donne du point *libre* sera ensuite généralisée et appliquée à un système de points.

71. Le point libre sera évidemment en équilibre si la résultante de toutes les forces qui le sollicitent est égale à zéro, ou si ces forces peuvent se réduire à deux forces égales et agissant en sens contraires.

72. Mais la valeur $\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$, de la résultante, ne peut pas être nulle, tant que les quantités qui sont sous le radical auront des valeurs finies, puisque ces quantités sont des quarrés, essentiellement positifs; il faut donc que chacune d'elles soit zéro séparément, ou qu'on ait

$$X=0\ ;\ Y=0\ ;\ Z=0.$$

73. D'après l'indépendance qui existe entre les composantes rectangulaires X, Y et Z, et qui a été expliquée avec détail art. 57, aucune de ces trois forces n'exerce d'action parallèlement au plan perpendiculaire à sa direction, chacune des équations précédentes indique donc particulièrement que le point ne peut, en vertu des forces qui le sollicitent, prendre aucun mouvement parallèlement à l'axe auquel se rapportent, art. 63, les angles, dont les cosinus entrent dans cette équation; c'est l'expression d'un équilibre partiel relatif à cet axe; un pareil équilibre peut exister pour un ou deux axes seulement, sans équilibre complet, et alors l'égalité à zéro n'a lieu que pour une ou deux des trois quantités X, Y, Z.

74. Les forces P', P'', etc. qu'on suppose en équilibre, peuvent être, par les règles données précédemment pour la composition des forces, réduites à deux, l'une desquelles serait la force P', l'autre que je désignerai par R' étant la résultante de toutes les forces restantes P'', P''', ect. Cette opération ne doit rien changer à l'équilibre présupposé puisque l'effet d'une résultante est parfaitement identique avec celui de ses composantes; donc les forces P' et R' doivent être en équilibre et par conséquent égales et directement opposées, car si l'une et l'autre de ces dernières conditions n'avoient pas lieu ces forces

auraient une résultante assignable et ne seraient plus en équilibre. Le même raisonnement peut se faire sur chacune des forces P'', P''' etc. qui se trouve, ainsi, égale en intensité à la résultante de toutes les autres forces, et agissant sur la même ligne de direction, mais en sens contraire.

On a vu art. 40, l'inverse de la proposition que je viens de démontrer.

Quelques propriétés de l'équilibre d'un point libre.

75. J'ai publié, en 1800, dans ma *Mécanique philosophique*, une construction géométrique de la résultante d'un nombre quelconque de forces appliquées à un même point, qui sert aussi à vérifier l'équilibre qu'on supposerait exister entre ces forces; cette construction est curieuse, et je vais la donner, après avoir démontré les théorêmes de géométrie sur lesquelles elle se fonde.

Si on a, dans l'espace, un polygone fermé, dont les côtés, peuvent être ou ne pas être dans le même plan, la somme des projections orthogonales des côtés de ce polygone sur une droite de position donnée, sera égale à zéro ; ainsi, en rapportant les positions des sommets des angles de ce polygone aux trois axes rectangulaires des x, y et z, désignant les longueurs de ses côtés par λ', λ'' etc. les angles respectifs, que ces côtés font avec les axes des x, des y et des z, par α', α'' etc. ; δ', δ'', etc. ; γ', γ'', etc. ; on a les équations

$$\Sigma(\lambda \cos.\alpha)=0\ ;\ \Sigma(\lambda \cos.\delta)=0\ ;\ \Sigma(\lambda \cos.\gamma)=0.\ (*)$$

Il est essentiel d'avoir une idée nette de la manière de déterminer les signes des cosinus dans ces équations, qui est analogue à celle que j'ai indiquée art. 25 ; prenons λ' pour premier côté du polygone, et appellons une des extrémités de λ', son *origine*, et l'autre extrémité, son *dernier point*; on peut, pour ce premier côté, prendre arbitrairement l'*origine* à l'une ou l'autre de ses extrémités, mais ensuite le choix n'est plus arbitraire pour les autres côtés ; il faut que le *dernier point* de λ' soit l'*origine* du côté qui lui est contigu, que le *dernier point* de

(*) Le signe Σ indique et indiquera, désormais, dans la suite de ce traité, la somme de toutes les quantités accentuées de la forme de celle qui est sans accent devant ce signe ; ainsi $\Sigma(\lambda \cos.\alpha)=\lambda' \cos.\alpha' + \lambda'' \cos.\alpha'' +$ etc.

celui-ci soit l'*origine* du suivant, et ainsi de suite, en allant toujours dans le même sens, jusqu'à ce qu'on soit revenu à l'origine de λ'.

Cela posé, si, par l'*origine* d'un côté quelconque λ, on fait passer trois plans rectangulaires, respectivement parallèles aux plans des xy, des xz et des yz, et que je nommerai plans des $x'y'$, $x'z'$ et $y'z'$, et qu'on prenne sur les x', y', z' positives, les origines des angles ou arcs α, $\mathit{6}$, γ, qui ne doivent pas excéder 200°, les points extrêmes de ces arcs devront se trouver sur la ligne λ, du même côté, par rapport à son *origine*, que son *dernier point*; les signes des cosinus dépendront ainsi de la *région* dans laquelle ce *dernier point* se trouvera.

Les équations ci-dessus se vérifient facilement, d'après cette manière de déterminer les signes des cosinus; menons, de l'*origine* du premier côté, une perpendiculaire ou ordonnée, sur le plan yz, et faisons varier cette ordonnée de position et de longueur, de manière qu'elle parcoure le périmètre entier du polygone; revenue à son point de départ elle aura, dans sa marche, subi deux sommes de variations, l'une positive l'autre négative, qui seront nécessairement égales entr'elles, puisque l'ordonnée a repris sa valeur initiale. Or chacune de ces variations depuis le sommet d'un angle jusqu'au sommet de l'angle suivant, est un des termes de $\Sigma\ (\lambda \cos. \alpha)$, donc $\Sigma\ (\lambda \cos. \alpha) = 0$. On démontrera, par un raisonnement absolument semblable, chacune des équations $\Sigma\ (\lambda \cos. \mathit{6}) = 0$; $\Sigma\ (\lambda \cos. \gamma) = 0$, en rapportant successivement l'ordonnée variable aux plans des xz et des xy.

76. Il est bon de démontrer l'inverse de ce théorême qu'on peut énoncer ainsi; si on a dans l'espace plusieurs lignes séparées, ou non, les unes des autres, mais dont les longueurs λ', λ'', etc. soient données, ces lignes faisant avec les axes des x, y, z les angles respectifs α', α'' etc.; $\mathit{6}'$, $\mathit{6}''$ etc.; γ', γ'' etc. l'*origine* et le *dernier point* de chacune étant fixés, et les signes des cosinus déterminés, comme ci-dessus, et que, dans cet état du système, on ait les équations $\Sigma\ (\lambda \cos. \alpha) = 0$, $\Sigma\ (\lambda \cos. \mathit{6}) = 0$; $\Sigma\ (\lambda \cos. \gamma) = 0$, en mettant tous ces côtés bout-à-bout, parallelement à leurs positions primitives, et dans un ordre absolument arbitraire, mais avec la condition que le *dernier point* de l'un quelconque d'entr'eux soit l'*origine* du suivant, le polygone ainsi composé sera un polygone fermé.

Pour le prouver faisons parcourir à une ordonnée perpendiculaire au plan

au plan $y z$ le périmètre du polygone, depuis l'*origine* du premier côté, celui par lequel on a commencé la formation de ce polygone, origine que je désigne par point *a*, jusqu'au *dernier point* du dernier côté, celui par lequel on a terminé la formation du polygone, point extrême que je désigne par point *b*; les variations successives de cette ordonnée entre les sommets consécutifs des angles seront les termes de la somme Σ (λ cos. α), mais cette somme de variations est nulle, par hypothèse, donc les valeurs, initiale et finale, de l'ordonnée sont égales entr'elles, donc les points extrêmes *a* et *b* sont dans un même plan parallèle au plan $y z$.

On prouvera, en raisonnant de la même manière, que les points *a* et *b* sont aussi tous deux dans un second plan parallèle au plan $x z$, et, enfin, dans un troisième plan parallèle au plan $x y$, donc ils se confondent en un seul point, celui qui est commun aux trois plans, et ces points *a* et *b* étant, par construction, les extrémités du périmètre du polygone, ce polygone est fermé. *C. Q. F. D.*

77. L'usage du théorème précédent, pour vérifier l'équilibre qu'on suppose exister entre des forces appliquées à un même point, est manifeste. Cet équilibre est exprimé, art. 72 par les équations $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, qui peuvent s'écrire ainsi

$$\Sigma\,(P \text{ cos. } \alpha)=0\ ;\ \Sigma\,(P \text{ cos. } \mathcal{C})=0\ ;\ \Sigma\,(P \text{ cos. } \gamma)=0\ ;$$

or chacune des forces P étant représentée par une ligne prise sur sa direction, ce que j'ai appellé l'*origine* de cette ligne, étant le point commun à toutes les directions, et, le point que j'ai appellé le *dernier point*, étant celui vers lequel la force tend à faire mouvoir le point commun d'application, si les équations précédentes existent réellement dans le système de forces dont il s'agit, les lignes P, mises bout-à-bout dans un ordre quelconque et dans des directions parallèles à celles qu'elles ont autour de leur point commun d'application, doivent, les autres conditions préscrites art. 75 et 76 étant observées, former un polygone fermé.

78. Lorsqu'en appliquant aux forces P la construction de l'art. précédent, on n'obtient pas un polygone fermé, l'équilibre n'a pas lieu, mais la même construction donne, en intensité, direction et sens d'action, la force qu'il faut ajouter au système pour établir son équilibre;

Cette force est représentée en intensité et direction par la ligne qu'il faudrait tracer pour fermer le polygone, et le sens de son action a lieu, du *dernier point* du côté par lequel on a achevé la formation du périmètre non fermé, à l'*origine* du côté par lequel on a commencé cette formation.

79. Cette dernière force, qui ferme le périmètre, étant supposée agir dans un sens contraire à celui suivant lequel elle agit lorsqu'elle doit établir l'équilibre, devient alors, (art. 74) la résultante de toutes les autres forces, la construction de l'art. précédent fournit donc un moyen graphique de déterminer la résultante de plusieurs forces appliquées à un même point, quelques soient le nombre, les intensités, les directions et les sens d'actions de ces forces.

80. Menons dans un polyèdre quelconque une droite ou diagonale qui joigne deux de ses angles solides choisis à volonté; on pourra toujours aller d'une extrémité à l'autre de cette diagonale, sur la surface du polyèdre, en suivant un certain nombre d'arêtes placées bout-à-bout. Si la diagonale représente, en intensité et direction, une force que je désignerai par F, et qu'on applique à une de ses extrémités les forces représentées, en intensités et directions, par les arêtes consécutives qui vont de cette extrémité à l'autre, on aura, suivant le sens qu'on supposera à l'action de la force F, ou un système de forces en équilibre dont F fait partie, ou un système de forces représentées par les arêtes du polyèdre, dont F est la résultante.

81. Il suit de là que si trois forces sont représentées en intensité et direction par trois lignes qui aient une intersection commune, et qui fassent, d'ailleurs, entr'elles, des angles quelconques, la résultante de ces trois forces sera représentée en intensité et directiou par la diagonale du parallélipipèdé construit sur les trois lignes.

Désignons ces forces ou lignes par g, h et k les angles compris entre g et h, g et k, h et k, respectivement, par a', a'', a''' et la diagonale du parallélipipède par F, on a, d'après les théorèmes de géométrie connus, pour calculer la résultante des trois forces g, h et k l'équation

$$F^2 = g^2 + h^2 + k^2 + 2gh \cos. a' + 2gk \cos. a'' + 2hk \cos. a'''$$

82. Dans le cas du parallélipipède rectangle, cette équation devient

$F^2 = g^2 + h^2 + k^2$, ainsi que cela doit être d'après les formules relatives aux composantes rectangulaires, démontrées art. 64 et 65.

83. Voici des conséquences très-remarquables des équations d'équilibre de l'art. 72.

Imaginons une ligne droite passant par le point commun d'application des forces et par un autre point dont la position dans l'espace est entièrement arbitraire; désignons par ρ la distance entre ces deux points, par θ', θ'', ect. les angles respectifs formés par la ligne ρ et par les directions des forces P', P'' ect., et par α, δ et γ les angles respectifs formés par cette même ligne ρ et par les axes des x des y et des z.

Si on multiplie la 1re. des équations de l'art. 72, par ρ cos. α, la 2me. par ρ cos. δ, la 3me. par ρ cos. γ, en substituant à X, Y et Z, leurs valeurs données art. 63, et qu'on ajoute les équations-produits, le terme qui contiendra la force P' sera $P \rho$ (cos. α cos. α' + cos. δ cos. δ' + cos. γ cos. γ'); or on sait, par la trigonométrie, que la somme des produits de cosinus, qui multiplie $P' \rho$, est égale au cosinus de l'angle formé par les deux lignes auxquelles appartiennent les cosinus qui entrent dans ces produits, et ces lignes, dans le cas présent, sont ρ et la ligne de direction de P', donc cette expression est égale à $P' \rho \cos. \theta'$; le même raisonnement s'applique aux termes qui renferment P'', P''', etc. ainsi l'équation unique résultante de la somme des équations-produits, est

$$\Sigma\ (P \rho \cos. \theta) = 0$$

pour avoir les signes des cosinus des angles θ', il faut prendre un point, sur la direction de ρ, à l'unité de distance du point commun d'application des forces; le point commun sera le centre d'un arc de cercle, qui, ayant son origine à l'autre point pris sur la direction de ρ, ira se terminer à un point de la ligne de direction de P vers lequel cette force tend à pousser le point commun d'application; cet arc sera la mesure de θ et déterminera le signe de cos. θ.

84. ρ cos. θ est la projection orthogonale de la ligne ρ sur la direction de la force P; si on conçoit une longueur quelconque, prise sur cette direction, et ayant une de ses extrémités au point commun d'application des forces, ρ cos. θ pourra être considéré comme un incrément, additif ou soustractif, de cette longueur.

85. Prenons, sur la direction de chaque force P, un point fixe, du

côté opposé à l'extrémité de l'arc θ par rapport au point commun d'application des forces, et désignons par la lettre p, portant le même accent que P, la distance entre ces deux points. Faisons ρ cos. $\theta = \Delta p$ l'équation de l'article précédent se changera en

$$\Sigma (P \Delta p) = 0$$

et on fera, dans chaque terme, Δp positif ou négatif respectivement, suivant que cet incrément tombera, ou non, par rapport au point commun d'application des forces, du côté vers lequel la force P pousse ce point.

86. M. le Chevalier Fossombroni à donné l'équation précédente dans son ouvrage intitulé *Memoria sul principio delle velocità virtuali*, avec une construction curieuse qui rend manifestes les signes des termes. Supposons que le point commun d'application des forces se trouve sur la surface d'une sphère, dont ρ soit le diamètre ; la partie de la direction de P, comprise dans cette sphère, sera, abstraction faite du signe, égale à ρ cos. θ, qui devra être affecté du signe $+$ ou $-$, respectivement, suivant que la force P tendra à pousser le point commun d'application en dedans ou en déhors de la sphère.

87. La grandeur de la ligne ρ étant absolument arbitraire on peut la supposer infiniment petite ; alors les incréments Δp deviendront des différentielles $d p$ et l'équation de l'art. 85 devra s'écrire ainsi $\Sigma (P d p) = 0$.

88. L'équation $\Sigma (P d p) = 0$ est celle à laquelle on parvient lorsqu'on veut exprimer que la somme des produits $P p$ est un maximum ou un minimum, les différentielles des quantités p étant prises de la manière indiquée art. 85, dans l'hypothèse de ρ infiniment petit ; et ce résultat offre une propriété, digne d'attention, de l'équilibre d'un point.

89. On a donné au produit $P\, dp$ le nom de *moment* de la force P ; cette expression *moment* a une autre acception dont je parlerai bientôt. L'équation $\Sigma (P\, dp) = 0$ est l'énoncé, applicable à l'équilibre d'un point matériel, d'un principe très-général de mécanique qu'on appelle principe des *vitesses virtuelles* et dont l'important usage pour l'analyse de tous les problémes d'équilibre et de mouvement sera développé dans la suite du cours.

De l'équilibre d'un point matériel assujetti à se mouvoir sur une surface ou sur une courbe données et immobiles. Pression qui a lieu au point d'application des forces.

90. On trouve dans ma *Mécanique philosophique*, art. 95 et 96, les équations fondamentales de la théorie que je vais exposer en donnant les démonstrations et les développements que la nature de cet ouvrage ne me permettait pas d'y placer.

La première condition de l'équilibre de plusieurs forces appliquées à un même point d'une surface immobile quelconque, est que la résultante de toutes ces forces agisse dans le sens de la normale à la surface, menée par le point commun d'application.

Si cette condition n'avait pas lieu, la résultante pourrait se décomposer en une force normale et une force tangentielle; cette dernière force n'exercerait aucune action contre la surface et ne pourrait être détruite, ni par la réaction de cette surface ni (art. 57) par aucune autre force du système; elle est donc incompatible avec l'équilibre, et la force normale doit exister seule.

91. Il est aisé d'énoncer analytiquement la condition dont je viens de parler; on connait la surface, sa position et celle du point d'application des forces, on connait donc, aussi, la direction de la normale et les angles A, B, C, qu'elle fait, respectivement, avec les x les y et les z; on a de même, par les formules démontrées art. 60 et suiv[ts]., la direction de la résultante et les angles respectifs α, 6, γ, qu'elle fait avec les mêmes axes; il sagit d'exprimer que le cosinus de l'angle formé par ces deux directions est égal à l'unité, positive ou négative, au moyen d'un théorème de trigonométrie déja cité et employé et qui donne l'équation de condition

$$\cos. A \cos. \alpha + \cos. B \cos. 6 + \cos. C \cos. \gamma = \pm 1$$

92. Cette condition serait la seule nécessaire pour assurer l'équilibre si le point commun d'application des forces était contenu entre deux enveloppes courbes, placées infiniment près l'une de l'autre, et telles que leurs normales eussent partout la même direction. Mais si le point dont il s'agit est posé sur une seule enveloppe courbe, sans être contenu par une autre, la résultante doit satisfaire à une seconde condition,

celle d'agir dans la direction convenable pour tenir le point matériel, sur lequel son action s'exerce, appliqué contre la surface courbe; voici comment on énoncera cette seconde condition.

Supposant la normale prolongée, à partir du point d'application, du côté de l'enveloppe courbe opposé à celui où se trouve le point matériel soumis à l'action des forces, et considérant ce prolongement comme la direction d'une force qui tendrait à faire traverser l'enveloppe courbe au point matériel, on prendra les angles A, B et C de la manière prescrite art. 25; les angles α, β et γ sont censés pris de la même manière, et si le premier membre de l'équation de l'art. 91 est positif, ou si on a

$$\cos. A \cos. \alpha + \cos. B \cos. \beta + \cos. C \cos. \gamma = +1$$

cette équation sera l'équation de condition demandée qui, lorsqu'elle aura lieu, prouvera que la résultante des forces agit dans le même sens que la force fictive qui a été supposée agir dans la direction de la normale pour faire traverser l'enveloppe courbe au point matériel, que par conséquent cette résultante presse le point matériel contre l'enveloppe courbe.

93. Les coordonnées du point d'application des forces, sur la surface ou enveloppe courbe, étant x, y et z, et considérant ce point comme l'origine commune de trois autres coordonnées x', y' et z' respectivement parallèles aux premières, on a pour l'équation du plan tangent

$$z' - \left(\frac{dz}{dx}\right) x' - \left(\frac{dz}{dy}\right) y' = 0$$

et pour les équations de la normale

$$x' + z' \left(\frac{dz}{dx}\right) = 0 \,;\; y' + z' \left(\frac{dz}{dy}\right) = 0 \,;\; y' \left(\frac{dz}{dx}\right) - x' \left(\frac{dz}{dy}\right) = 0$$

la troisième se déduit des deux premières.

En conséquence, faisant $\left\{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \omega$ les cosinus des angles formés par la normale et par les axes des x, y et z seront, respectivement,

$$-\frac{\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\omega} = \cos. A \,;\; -\frac{\left(\frac{dz}{dy}\right)}{\omega} = \cos. B \,;\; \frac{1}{\omega} = \cos. C$$

représantant par $K=0$ l'équation de la surface courbe, on a, en général,

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)+\left(\frac{dK}{dx}\right):\left(\frac{dK}{dz}\right)=0\,;\ \left(\frac{dz}{dy}\right)+\left(\frac{dK}{dy}\right):\left(\frac{dK}{dz}\right)=0$$

et on conclut de ces équations en faisant $\left\{\left(\frac{dK}{dx}\right)^2+\left(\frac{dK}{dy}\right)^2+\left(\frac{dK}{dz}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}=\Omega$

les valeurs suivantes des mêmes cosinus

$$\cos. A=\left(\frac{dK}{dx}\right):\Omega\,;\ \cos. B=\left(\frac{dK}{dy}\right):\Omega\,;\ \cos. C=\left(\frac{dK}{dz}\right):\Omega$$

D'un autre côté on a vu, art. 65, qu'en désignant par R la résultante de toutes les forces dont X, Y, Z seraient respectivement les sommes des composantes parallèles aux x, y et z on avait,

$$\cos. \alpha=\frac{X}{R}\,;\ \cos. \beta=\frac{Y}{R}\,;\ \cos. \gamma=\frac{Z}{R}$$

l'équation de l'art. précédent devient, en y substituant les valeurs des cosinus de $A, B, C, \alpha, \beta, \gamma$ qu'on vient d'assigner

$$Z\left(\frac{dK}{dz}\right)+Y\left(\frac{dK}{dy}\right)+X\left(\frac{dK}{dx}\right)=R\,\Omega$$

94. D'après l'identité des directions de la résultante des forces et de la normale à la surface courbe, au point commun d'application de ces forces, si on décompose chacune d'elles en deux, dont l'une soit normale et l'autre tangentielle, le système de ces dernières doit être en équilibre, ou avoir une résultante égale à zéro, car si cette résultante particulière n'était pas nulle, elle pourrait se composer avec la somme des forces normales qui des-lors ne serait plus la résultante générale.

Cette considération fournit deux équations de conditions par lesquelles on exprime l'égalité à zéro des sommes des composantes des forces tangentielles, prises respectivement par rapport à deux axes rectangulaires menés dans le plan tangent, mais ces équations n'ajoutent rien à ce qui est énoncé par l'équation de l'art. 92, ou par celle de l'art. 93, puisque l'équilibre auquel elles se rapportent est une conséquence nécessaire de l'identité de direction dont les équations des articles cités affirment l'existence.

95. La même identité des directions de la résultante des forces et de la normale à la surface courbe donne les équations séparées $\cos. A=\cos. \alpha$, $\cos. B=\cos. \beta$, $\cos. C=\cos. \gamma$, ou

$$X - R\left(\frac{dK}{dx}\right) : \Omega = 0\ ;\ Y - R\left(\frac{dK}{dy}\right) : \Omega = 0\ ;$$

$$Z - R\left(\frac{dK}{dz}\right) : \Omega = 0\ ;$$

en multipliant la 1ère. de ces équations par X, la 2eme. par Y la 3eme. par Z, faisant la somme des équations-produits, et observant qu'on a $X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2$, on retrouve l'équation de l'art. 93.

96. Éliminant $\frac{R}{\Omega}$ entre les trois équations de l'art. précédent on obtient les deux suivantes

$$X\left(\frac{dK}{dy}\right) - Y\left(\frac{dK}{dx}\right) = 0$$

$$X\left(\frac{dK}{dz}\right) - Z\left(\frac{dK}{dx}\right) = 0$$

97. J'ai donné dans ma *Mécanique philosophique*, art. 95, les équations des deux art. précédents ; il est manifeste qu'avec ces diverses équations, la relation $R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$, et l'équation de la surface, on a tout ce qu'il faut soit pour trouver un système de forces qui serait en équilibre sur un point déterminé de la surface, soit pour trouver le point de cette surface où il faudrait appliquer un système de forces donné si on voulait obtenir l'équilibre.

98. On aurait pu ramener le cas d'équilibre traité depuis l'art. 90, à celui d'un point *libre*, en introduisant dans l'analyse la *réaction* dûe à la résistance de la surface, laquelle est égale et directement opposée à la pression normale qu'éprouve cette surface; désignant par N la réaction dont il sagit, et considérant N comme une puissance qui se combine avec les sommes de composantes X, Y et Z, pour maintenir en équilibre le point d'application des forces, ce point peut être regardé comme libre, et on a, art. 72

$$N\cos. A + X = 0\ ;\ N\cos. B + Y = 0\ ;\ N\cos. C + Z = 0$$

d'où on déduit, d'abord une valeur de N numériquement égale à celle de la résultante R, ou de la pression normale qu'éprouve la surface, mais de signe contraire. Substituant ensuite pour N cette valeur et,

pour

pour cos. A, cos. B, cos. C, les expressions données art. 93, on a les équations de l'art. 95, etc.

99. La direction de l'axe des z étant supposée la même que celle de la normale au point d'application des forces, on a cos. $A=0$, cos. $B=0$, cos. $C=1$, et désignant par X', Y', Z', respectivement, ce que deviennent, dans ce cas, X, Y et Z, les équations de l'art. précédent se changent en

$$X'=0\,;\ Y'=0\,;\ N+Z'=0.$$

Les deux premières expriment l'équilibre des forces tangentielles dont j'ai parlé, art. 94; la troisième, lorsqu'on a l'intensité, la direction et le sens de l'action de chacune des forces qui entrent dans Z', donne l'intensité et le sens de l'action de la force normale N, laquelle fait équilibre à la pression normale R qu'éprouve la surface.

100. Il résulte de l'analyse précédente (depuis l'art. 90), que cette pression R est entièrement indéterminée et arbitraire lorsque le point de la surface est donné et qu'il s'agit d'assigner un système de forces qui soit en équilibre sur ce point; c'est ce dont on se rend raison immédiatement en considérant que la seule condition, pour cet équilibre, est que la direction de la résultante soit normale, cette résultante pouvant d'ailleurs avoir une intensité quelconque; aussi voit-on que les équations de l'art. 95, lorsque les coordonnées x, y et z sont connues, ne donnent que les rapports entre les forces X, Y Z, et laissent la valeur d'une des quatre quantités X, Y, Z et R absolument arbitraire; et en effet comme dans le cas dont je parle, on satisfait à toutes les conditions exigées par la seule direction de la résultante et que cette direction dépend des rapports entre X, Y, et Z, ces rapports sont les seules choses que les équations de l'art. cité aient à faire connaître. Ces équations (d'où on déduit les valeurs particulières de x, y et z lorsque le système de forces est donné, cas auquel le problème est déterminé) suffisent donc, dans tous les cas, et l'usage des autres relations dont il est parlé art. 97, n'est indiqué que pour satisfaire à des conditions particulières, faciliter les calculs etc. Ces observations, sont naturellement suggérées par le contenu des art. précédents, mais j'ai cru devoir en faire l'objet d'un article particulier, parcequ'elles complètent les explications nécessaires pour

l'intelligence d'une théorie curieuse et sur laquelle j'aurai occasion de revenir relativement à des quetions importantes.

101. Je passe au cas où le point matériel, sollicité par les forces, est assujetti à se mouvoir dans un canal immobile et infiniment étroit, à simple ou double courbure; dans ce cas, on a, pour condition unique d'équilibre, que la résultante des forces agisse dans un plan perpendiculaire à l'élément de courbe sur lequel le corps est posé, et cette condition renferme celle de l'égalité à zéro de la somme des composantes tangentielles, c'est-à-dire de la somme des produits des forces par les cosinus des angles qu'elles forment avec la tangente menée à leur point d'application. En désignant par ds l'élément de courbe, à ce même point, les expressions $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ seront, respectivement, les cosinus des angles qu'il forme avec les axes coordonnés, et comme les cosinus des angles formés par la résultante des forces et par les mêmes axes sont $\frac{X}{R}$, $\frac{Y}{R}$, $\frac{Z}{R}$, on peut, par le théorême connu, exprimer que cette résultante et cet élément de courbe forment un angle droit entr'eux en égalant à zéro la somme des produits des couples de cosinus rapportés à un même axe, ce qui donne l'équation,

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0$$

102. Représentons les équations de la courbe, ou du canal infiniment étroit qui renferme le point matériel, par

$$z = f(x)\ ;\ y = \phi\,(x)$$

ces équations donneront

$$dz = dx f'\,(x)\ ;\ dy = dx\,\phi'\,(x)$$

et l'équation de l'art. précédent se changera en

$$X + Y\phi' x + Zf'\,(x) = 0$$

qui assurera léquilibre toute les fois qu'elle aura lieu.

103. Lorsque les forces seront données, l'équation précédente fera connaître la valeur de x correspondante au point du canal où il faut appliquer ces forces pour obtenir l'équilibre; les deux autres coordonnées se calculeront par les équations $z = f(x)$ et $y = \phi\,(x)$.

104. La question de déduire de la connaissance des forces, celle de

la position de leur point d'application est donc déterminée; il n'en est pas de même de la question inverse; si le point d'application des forces est assigné, *à priori*, on pourra se donner arbitrairement deux des trois composantes rectangulaires X, Y, Z et la troisième se déduira de l'équation de l'article 102; ou, plus généralement encore, se donner toutes les forces du système à l'exception d'une, pour laquelle on pourra, même, assigner, arbitrairement, le sens de son action, et, de plus, ou sa direction, ou son intensité et un des angles qu'elle forme avec les axes coordonnés.

105. Cette indétermination tient à ce que la section transversale et normale du canal curviligne, qui contient le point matériel soumis à l'action des forces, ayant, par hypothèse, un périmètre fermé, ce point sera toujours appuyé contre la paroi du canal quelque soit l'angle formé par la résultante et par une ligne donnée de position, dans le plan de cette section, angle qui peut varier depuis 0.° jusqu'à 400°; tout se réduit à assurer l'existence de la résultante dans le plan normal en satisfaisant à l'équation de l'art. 101 ou à celle de l'art. 102.

Mais si la section transversale et normale n'a pas un périmètre fermé, c'est-à-dire si le canal curviligne est un canal ouvert, l'indétermination n'est plus aussi grande; en menant, par le point d'application des forces une normale au périmètre, à chacune de ses extrémités, la direction de la résultante ne peut pas sortir de l'espace angulaire renfermé entre ces deux normales, et le sens de son action doit toujours être tel qu'elle pousse le point matériel dans ce même espace afin de le faire appuyer contre la paroi du canal. La forme de ce canal est censée connue dans son étendue entière et par conséquent les positions des normales dont je viens de parler, sont aussi connues à chacun de ses points.

106. Ces deux normales aux extrémités du périmètre, pourraient être considérées comme appartenants à deux surfaces courbes qui formeraient par leur intersection le canal dans lequel le point matériel est assujetti à se mouvoir; mais il y a une infinité de surfaces qui peuvent avoir leur intersection sur une même courbe, en se coupant sur un angle donné pour chaque point, et comme cet angle (ou son supplément) est l'unique chose à considérer quand on veut assigner les limites entre lesquelles la direction de la résultante doit se trouver, la question des conditions de l'équilibre sera traitée complètement si on y introduit les

angles qui déterminent la direction de la résultante dans le plan normal, de manière à pouvoir toujours reconnaître si l'existence de l'équilibre est compatible avec les variations de ces angles dans certaines limites.

Cette manière de traiter le problème a l'avantage d'être facilement et immédiatement applicable à des recherches physico-mathématiques où on considère l'équilibre et le mouvement des corps dans des canaux curvilignes de grandeurs finies, et de forme ou donnée ou inconnue; en voici l'analyse.

107. Par le point d'application des forces qui a x, y et z pour coordonnées, je mène trois axes respectivement parallèles à ces coordonnées qui seront les axes des x', y' et z' et je suppose que les équations de la ligne de direction de la résultante R des forces appliquées à ce point sont

$$y' = a_{\prime} x' \; ; \; z' = a_{\prime\prime} x'$$

faisant . . . . $\sqrt{1 + a_{\prime}^2 + a_{\prime\prime}^2} = \Gamma$

les valeurs des cosinus des angles formés par cette ligne et par les axes des x, des y et des z seront respectivement

$$\frac{1}{\Gamma} \; ; \; \frac{a_{\prime}}{\Gamma} \; ; \; \frac{a_{\prime\prime}}{\Gamma}$$

et pour exprimer que cette même ligne est dans un plan normal à la courbe ou que sa direction est à angle droit sur celle de l'élément ds, au point d'application des forces, on a l'équation

$$dx + a_{\prime} dy + a_{\prime\prime} dz = 0$$

car, en divisant cette équation par Γds, ses termes deviennent les produits respectifs des cosinus $\frac{1}{\Gamma}$, $\frac{a_{\prime}}{\Gamma}$, $\frac{a_{\prime\prime}}{\Gamma}$, par les cosinus $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ et $\frac{dz}{ds}$ des angles formés par l'élément ds et par les x les y et les z.

108. En substituant, dans l'équation précédente, pour dy et dz leurs valeurs, données art. 102, l'équation précédente devient

$$1 + a_{\prime} \varphi' (x) + a_{\prime\prime} f' (x) = 0$$

109. Les cosinus $\frac{X}{R}$, $\frac{1}{\Gamma}$; $\frac{Y}{R}$, $\frac{a_{\prime}}{\Gamma}$; $\frac{Z}{R}$, $\frac{a_{\prime\prime}}{\Gamma}$; étant égaux,

par hypothèse, on a les équations

$$X = R : \Gamma; \; Y = R\,a_{,} : \Gamma; \; Z = R\,a_{,,} : \Gamma$$

110. Éliminant $R : \Gamma$ entre ces équations on obtient les deux suivantes

$$Y = a_{,}\,X; \; Z = a_{,,}\,X$$

111. Les équations précédentes fournissent toutes les déterminations que la question, considérée sous le point de vue le plus général, peut comporter. Si on veut avoir les conditions de l'équilibre dans le cas où le canal est fermé et où la résultante des forces peut avoir une direction quelconque dans le plan normal, on éliminera $a_{,}$ et $a_{,,}$ entre les équations de l'art. 110 et l'équation de l'art. 108, et on obtiendra l'équation de l'art. 102 à laquelle j'étais déja parvenu par la considération immédiate de ce cas particulier.

112. Si, dans le cas du canal ouvert, le point d'application des forces est donné, les limites de $a_{,}$ seront connues d'après la forme de ce canal; en effet, $a_{,}$ étant la tengente trigonométrique de l'angle compris entre la projection orthogonale de R sur le plan $x'y'$ et l'axe des x', en faisant, sur le même plan, la projection de l'angle formé par les deux normales extrêmes du périmètre de la section transversale et normale du canal, on pourra toujours donner à a' une valeur telle que la projection de R se trouve dans la projection de l'angle des normales, et dès-lors, R elle même se trouvera dans l'angle des normales, si on l'assujettit, d'ailleurs, à avoir sa direction dans le plan de la section normale au canal. Assignant donc à $a_{,}$ une valeur arbitraire entre les limites dont je viens de parler, $a_{,,}$ se calculera par l'équation de l'art. 108 après quoi les composantes X, Y, Z se déduiront des équations de l'art. 109.

113. Lorsque les forces sont données et qu'il s'agit de trouver, sur le canal curviligne, un point d'application où elles puissent être en équilibre, on connait X, Y, Z, $a_{,}$ et $a_{,,}$ et on détermine la valeur de x ou par l'équation de l'art. 102, ou par celle de l'art. 108; le point ainsi déterminé sera celui où la résultante se trouvera dirigée dans le plan normal, mais toutes les conditions de l'équilibre ne seront pas assurées pour cela, car rien n'exprimera encore que la résultante des forces tend à faire appuyer son point d'application contre la paroi du canal ouvert, c'est-à-dire que les valeurs de $a_{,}$ et $a_{,,}$ sont telles que la direction de la résultante est renfermée dans l'angle formé par les

deux normales extrêmes du périmètre de la section transversale et normale de ce canal, au point trouvé ; c'est une seconde condition tout-à-fait indépendante de la première, et il peut se faire, d'après la loi qui lie la forme de la section transversale aux coordonnées du point où cette section est prise, qu'aucun point du canal ne satisfasse aux deux conditions à la fois ; en effet, désignant par A' et A'' les angles respectifs, formés par les projections sur le plan $x'\,y'$, des normales extrêmes du périmètre, et par l'axe des x', on doit avoir, dans l'hypothèse ou ce qui concerne la forme et les dimensions du canal, se trouve, à tous égards, soumis à des loix régulières, $A' = F(x)$, $A'' = \Theta(x)$ et les conditions complètes de l'équilibre n'auront lieu qu'autant qu'en substituant, dans ces équations, la valeur de x déduite de l'équation de l'art. 102, ou de celle de l'art. 108. il en résultera pour les angles A' et A'' des valeurs telles que l'un de ces angles soit plus grand et l'autre plus petit que celui dont la tangente $= a_{,}$; mais comme, par la nature de la question, les fonctions $F(x)$ et $\Theta(x)$ sont entièrement indépendantes de $f(x)$ et $(\phi)\,x$, vu qu'un canal, dont la courbure longitudinale est donnée, peut avoir des sections transversales soumises à un infinité de loix différentes, rien n'assujettit la valeur de x que vérifie l'équation de l'art. 102, à vérifier les inégalités $A' <$ (arc tang. $= a_{,}$); $A'' >$ (arc tang. $= a_{,}$), ainsi ces conditions diverses doivent, en général, être satisfaites, séparément, par des points différents

114. Dans les applications qu'on aurait à faire de la théorie précédente à certains problèmes physico-mathématiques on réunirait les deux conditions dont je viens de parler en faisant coïncider la direction de la résultante avec celle du rayon de courbure, ce qui est un cas remarquable. Dans ce cas $a_{,}$ et $a_{,,}$ sont déterminés pour chaque point, et on a

$$a_{,} = \frac{dy\,dz\,ddz - (dx^2 + dz^2)\cdot ddy}{\frac{1}{2}\,dx\,.\,d\,(dy^2 + dz^2)}$$

$$a_{,,} = -\frac{(dx + a_{,}\,dy)}{dz}$$

la seconde de ces équations a été démontrée art. 107 ; la 1ère. s'obtient en éliminant y' et z' de l'équation, donnée par la géométrie analytique,

$$z' = \frac{dz\,ddy - dy\,ddz}{dx\,ddy}\,x' + \frac{ddz}{ddy}\,y',$$

du plan qui renferme deux éléments concécutifs de la courbe, (et dans lequel, par conséquent, se trouve le rayon de courbure) avec les équations $y' = a_{,} x'$, $z' = a_{,,} x'$, divisant par x', et substituant, ensuite, pour $a_{,,}$, sa valeur $-\frac{(dx + a' dy)}{dz}$.

Au moyen de ces déterminations et des équations, art. 106 et suiv., on pourra toujours assigner, dans le cas dont je viens de parler, soit le système de forces qui serait en équilibre sur un point donné, soit le point où cet équilibre aurait lieu entre des forces données.

115. Quelques soient les inconnues et les données on a toujours, ultérieurement, $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ égale à la pression normale qui s'exerce contre la paroi du canal.

116. Je termine ce que j'ai à dire sur ce sujet en observant que le cas de l'équilibre d'un point matériel, assujetti à se mouvoir dans un canal curviligne, aurait pu être ramené au cas de l'équilibre d'un point libre en introduisant, dans l'analyse, deux forces dirigées suivant les normales extrêmes du périmètre de la section transversale et normale du canal, et exprimant que le système des forces qui agissent sur le point matériel, peut être réduit à ces deux forces normales; c'est une méthode semblable à celle que j'ai indiquée art. 98 et en supposant qu'un des axes coordonnés, parallelement auxquels se font les décompositions, a la même direction que l'élément de courbe, ce qui détermine les deux autres à se trouver dans le plan normal, on trouve que la somme des composantes dirigées suivant le premier axe doit être zéro par elle même, ce qui est manifeste d'ailleurs, ainsi que je l'ai observé article 101.

FIN DE LA PREMIÈRE SECTION.

SECTION II.

DE L'EQUILIBRE.

ET

DE LA COMPOSITION DES FORCES

APPLIQUÉES

A UN SYSTÊME DE POINTS

DONT

LA FORME EST INVARIABLE.

Équations de *condition* d'un système de forme invariable.

117. Après avoir exposé tout ce qu'il est important de savoir sur la partie de la statique dans laquelle on suppose que les forces dont on veut vérifier l'équilibre, ou auxquelles on veut substituer d'autres forces, ont leurs directions concourantes en un point commun, je vais introduire l'*étendue* et la *figure*, dans les nouveaux objets d'étude dont les élèves doivent s'occuper, et traiter de l'application des forces aux systèmes de formes, quelconques, mais soumises à la condition d'être invariables.

Ces systèmes sont ceux que j'ai définis art. 32, et voici comment on peut exprimer, par des équations, les *conditions* qui les caractérisent. Soient x', x'' ect. y', y'', ect. z', z'' ect. les coordonnées des différents points, les axes de ces coordonnées ayant des positions fixes par rapport au système de ces points, l'invariabilité de forme de ce système aura évidemment lieu si les distances de l'un quelconque de ses points à tous les autres, sont des quantités constantes; et cette

condition s'énonce par les équations suivantes, dont les premiers membres sont les valeurs connues des quarrés des distances entre des points de l'espace pris deux-à-deux,

$$(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2=A';$$
$$\{(x'-x''')^2+(y'-y''')^2+(z'-z''')^2\}=A''; \text{ etc.}$$
$$(x''-x''')^2+(y''-y''')^2+(z''-z''')^2=B';$$
$$(x''-x'''')^2+(y''-y'''')^2+(z''-z'''')^2=B''; \text{ etc.}$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

A', A'' ect. B', B'' ect. étant des constantes. Si n désigne le nombre des points du systême, le nombre des équations sera $\frac{n(n-1)}{2}$

118. On peut, encore, exprimer la condition de l'*invariabilité* de forme, en disant que les distances d'un point quelconque du systême, à trois points déterminés du même systême, qui ne sont pas en ligne droite, ne peuvent pas changer. On a, alors, trois équations pour énoncer l'*invariabilité* des distances respectives des trois points auxquels on rapporte tous les autres points, et chacun de ces derniers fournit, ensuite, trois équations pour ses distances aux trois premiers; ainsi le nombre des équations de *condition* est $3+3(n-3)$ ou $3n-6$, n étant le nombre total des points du systême; ces équations sont d'ailleurs de même forme que celles de l'art. précédent.

En plaçant deux des axes coordonnés dans le plan qui renferme les trois points dont les distances, à tous les autres points, entrent dans les équations de *condition*, on simplifiera les équations, qui se rapportent à ces trois points, et on rendra la totalité des équations de condition indépendante de la position absolue du systême dans l'espace.

119. Il ne faut pas perdre de vue, que d'après les notions données depuis l'art. 30 jusqu'à l'art. 37, les systêmes dont je parle ne sont que de simples moyens de transmission des actions des forces qu'on suppose explicitement appliquées à ces systêmes, et qu'il faut, par la pensée, faire abstraction de la pesanteur et de toutes les autres forces naturelles, qui pourraient agir sur les parties matérielles dont ils sont composés. Il faut se rappeler encore, qu'il a été dit, dans les art. cités, que la considération de la *masse* de l'*inertie* ect. était étrangère aux ques-

tions d'équilibre traitées dans cette première partie du cours, d'où il suit qu'on peut, sans rien changer à l'effet des forces sur un système, ajouter des lignes ou des plans matériels à ceux qui y existent déja, pourvu, néanmoins, qu'on ne dénature point les *conditions* de ce système, et que ces conditions puissent toujours être exprimées par les mêmes équations.

Conditions de l'équilibre des forces agissant dans un même plan appliquées à un système *libre* de deux et de trois points, dont les distances respectives sont invariables.

120. Je commence par le cas le plus simple d'un système, *étendu* et *figuré* de forme invariable, celui où on suppose ce système libre et composé de deux points seulement, les forces appliquées à ces points étant supposées agir dans un même plan.

Soient, A et B, ces deux points, liés l'un à l'autre par la ligne matérielle, droite ou courbe, $A\,h\,g\,B$, et supposons qu'ils soient sollicités, respectivement, par la force P, agissant dans le sens $A\,P'$, et par la force Q, agissant dans le sens $A\,Q'$, le point de concours des directions des deux forces étant en R'. Si on imagine des lignes droites matérielles et rigides $P'\,A\,R'$ et $Q'\,A\,R'$, rien, art. 119, ne sera changé à l'état du système; et, art. 24, la force P pourra être censée appliquée à un point quelconque de la ligne $R'\,P'$, et la force Q à un point quelconque de la ligne $R'\,Q'$; ces forces devront agir, en poussant, si elles sont appliquées aux parties des lignes de leurs directions situées du côté de R' par rapport aux points A et B, et, en tirant, si elles sont appliquées aux parties opposées, d'où il suit que $A\,P'$ et $B\,Q'$ pourront être, ou des lignes rigides, ou des fils parfaitement flexibles. Fig. 6

Appliquant chacune des forces au point R' de sa direction, on pourra leur substituer une force unique agissant dans la direction de la droite $R'\,g\,r$; or pour que l'équilibre existe il faut que cette résultante soit nulle, et cette condition ne peut avoir lieu qu'autant que le point R' se trouvera sur la droite $A\,R\,B$, et que les forces P et Q, agissant l'une dans le sens $R\,A\,P$ et l'autre dans le sens contraire $R\,B\,Q$ seront égales entr'elles.

121. Si chacun des points A et B est sollicité par plusieurs forces, (en conservant l'hypothèse des actions de toutes ces forces dans un même plan) on composera chaque grouppe en une force unique et on appliquera le raisonnement précédent aux deux résultantes, en observant que, d'après les art. 68 et 69, les directions de ces deux résultantes doivent se trouver dans un même plan avec les directions des forces qu'elles remplacent.

Ainsi la condition unique de l'équilibre d'un système libre et de forme invariable, de deux points sollicités par des forces qui agissent dans un même plan, est que toutes ces forces puissent se réduire à deux forces égales agissant en sens opposés sur la ligne droite qui joint les deux points.

122. Je passe à l'importante question des conditions de l'équilibre d'un système de trois points. Toutes les forces appliquées au système sont supposées réductibles à trois forces agissant dans le plan des trois points, et appliquées, chacune, à un de ces points. Soient P', P'' et P''' ces trois forces; je compose d'abord, P' et P'' en une seule force Π, appliquée au point de concours de leurs directions, et je compose ensuite Π et P''' en une seconde force aussi appliquée au point de concours de leurs directions; mais, l'équilibre étant supposé avoir lieu, cette seconde composante doit être égale à zéro, donc les forces P''' et Π doivent être égales et agir en sens opposés sur une même ligne droite; et comme, par hypothèse, la force Π est dirigée sur le point de concours des forces P' et P'', la direction de P''' doit aussi concourir au même point; donc les directions de P', P'' et P''' doivent se rencontrer en un point commun.

Voila une première condition, purement géométrique, qu'il s'agit d'exprimer analytiquement, et, cette condition étant assurée, on n'aura plus qu'à ajouter à l'équation par laquelle elle s'exprime, les équations de l'art. 72, relatives à l'équilibre d'un point (en ramenant ces équations au cas de deux dimensions) puisque, sans rien changer à l'état du système, on peut considérer les trois forces qui représentent toutes celles dont les actions combinées s'exercent sur ce système, comme appliquées à leur point commun de concours.

123. Voici un moyen simple et direct d'énoncer analytiquement la condition qui, réunie à celles de l'art. 72, assure l'existence de l'équilibre.

Soient $C'B'$, $C''B''$, $C'''B'''$ trois lignes droites, qu'on suppose être les lignes de directions de trois forces P', P'', P''', tracées dans le même plan, H étant le point de rencontre de la 1ere. et de la 2eme. et K le point de rencontre de la 1ere. et de la 3eme.; traçons, dans le plan qui renferme ces lignes, les axes rectangulaires AX, AY rencontrant leurs directions en C', C'', C'''; de l'origine A menons sur $B'C'$, $B''C''$, et $B'''C'''$ les perpendiculaires AP', AP'', AP'''; enfin traçons les hypothénuses AH, AK, et faisons

Fig. 7

$$\textit{Angle } B'C'X=\alpha'\ ;\ \textit{Angle } B''C''X=\alpha''\ ;\ \textit{Angle } B'''C'''X=\alpha'''.$$
$$\textit{Angle } HAX=\theta'\ ;\ \textit{Angle } KAX=\theta''$$
$$AP'=p'\ ;\ Ap''=p''\ ;\ AP'''=p'''.$$

Les triangles rectangles $AP'H$ et $AP''H$; $AP'K$ et $AP'''K$, donnent
$$p' : p'' :: \sin.\ C'HA : \sin.\ C''HA :: \sin.\ (\theta'-\alpha') : \sin.\ (\theta'-\alpha'')$$
$$p' : p''' :: \sin.\ C'KA : \sin.\ C'''KA :: \sin.\ (\theta''-\alpha') : \sin.\ (\theta''-\alpha''')$$
d'où on déduit les équations

$$\left.\frac{p'}{p''}=\frac{\sin.\ (\theta'-\alpha')}{\sin.\ (\theta'-\alpha'')}\ ;\ \frac{p'}{p'''}=\frac{\sin.\ (\theta''-\alpha')}{\sin.\ (\theta''-\alpha''')}\right\}\ldots\ldots (A)$$

et pour exprimer que les lignes $C'B'$, $C''B''$, $C'''B'''$ ont un point commun d'intersection, il suffit de faire, dans les équations précédentes, $\theta'=\theta''$, condition qui assujettit les hypothénuses AH et AK à se confondre en une seule ligne, et par conséquent les points d'intersections binaires, H et K, à se réunir en un seul point d'intersection commune.

Faisant donc $\theta'=\theta''=\theta$, dévcloppant, d'après cette hypothèse, dans les équations (A), les sinus des différences entre deux arcs, en sinus et en cosinus de ces arcs, au moyen du théorème
$$\sin.\ (\theta-\alpha)=\sin.\ \theta\cos.\ \alpha-\cos.\ \theta\sin.\ \alpha,$$
et divisant pour $\cos.\ \theta$, ces équations fournissent, sous deux formes, les valeurs de tang. θ, qui, égalées entr'elles, donnent pour l'équation de condition cherchée,

$$(B)\ldots\ \frac{p'\sin.\ \alpha''-p''\sin.\ \alpha'}{p'\cos.\ \alpha''-p''\cos.\ \alpha'}=\frac{p'\sin.\ \alpha'''-p'''\sin.\ \alpha'}{p'\cos.\ \alpha'''-p'''\cos.\ \alpha'}$$

Cette équation peut être remplacée par les équations (A) en substituant dans celles-ci, à chacun des angles θ' et θ'' un même angle θ.

124. L'existence d'un point commun de concours des directions de trois forces qui agissent suivant $C'B'$, $C''B''$, et $C'''B'''$ étant ainsi assuré, et le plan qui renferme ces directions étant supposé être celui des xy, sur lequel on compte les x de A en X, et les y de A en Y, les équations de l'art. 72 donnent, en observant que la composante Z n'existe point lorsque toutes les forces agissent dans le plan xy, substituant pour X et Y leurs valeurs, données art. 63, et observant que, dans le cas dont il s'agit ici, cos. δ'=sin. α' etc.

$$(C) \ldots \left\{ \begin{array}{l} P' \cos. \alpha' + P'' \cos. \alpha'' + P''' \cos. \alpha''' = 0 \\ P' \sin. \alpha' + P'' \sin. \alpha'' + P''' \sin. \alpha''' = 0 \end{array} \right.$$

125. Je multiplie la première de ces équations par sin. θ, la seconde par cos. θ, je retranche celle-ci de l'autre, et d'après le théorème de trigonométrie, cité et employé dans l'article 123, j'obtiens l'équation

$$(D) \ldots P' \sin. (\theta - \alpha') + P'' \sin. (\theta - \alpha'') + P''' \sin. (\theta - \alpha''') = 0$$

j'élimine de cette équation, sin. $(\theta - \alpha'')$ et sin. $(\theta - \alpha''')$, par les équations (A), (en faisant dans celles-ci $\theta' = \theta$, $\theta'' = \theta$), et divisant par sin. $(\theta - \alpha')$ il me vient,

$$(E) \ldots\ldots\ldots P'p' + P''p'' + P'''p''' = 0 \quad (*)$$

équation qui peut tenir lieu, soit des équations (A), soit de l'équation (B) de l'art. 123, et qui, réunie aux deux équations de l'article précédent, exprime complètement les conditions de l'équilibre du système de trois points sollicités par des forces agissants dans le plan qui renferme ces points.

(*) J'ai donné, pour la première fois, dans ma *Mécanique philosophique*, art. 63, l'analyse par laquelle je parviens à cette équation; les conséquences que j'en ai tirées dans cet ouvrage, et qu'on retrouvera dans le présent traité, et, en général, la manière dont j'ai expliqué et interprété les équations de condition d'équilibre, m'ont fourni le moyen de dégager entièrement l'exposition de la statique, des considérations de mouvement qui y étaient ordinairement introduites; je crois, en cela, avoir rendu un service aux études élémentaires.

126. J'ai supposé, dans l'analyse précédente, que les angles α', α'' et α''' avaient tous des sinus et des cosinus positifs, mais il est bon de remarquer que quelques soient, dans chaque cas particulier, les combinaisons des signes de ces sin. et cos., d'après les directions et les sens d'actions des forces, les trois sinus n'en disparaitront pas moins de l'équation (D), quand on y aura introduit les valeurs de deux d'entr'eux en fonctions du troisième, et cette équation se réduira, dans tous les cas, aux signes près, à l'équation (E), qui ne renferme que les produits des forces par les perpendiculaires menées sur leurs directions d'un point donné dans le plan qui renferme ces directions. On est donc assuré que, pour toutes les combinaisons possibles de directions et de sens d'actions, compatibles avec l'équilibre, les conditions de cet équilibre, entre trois forces, seront exprimées complètement par les équations

$$P' \cos. \alpha' + P'' \cos. \alpha'' + P''' \cos. \alpha''' = 0$$
$$P' \sin. \alpha' + P'' \sin. \alpha'' + P''' \cos. \alpha''' = 0$$
$$P' p' + P'' p'' + P''' p''' = 0$$

127. Les signes des cosinus qui entrent dans la première de ces trois équations se déterminent toujours de la manière prescrite art. 25; quant aux sinus, il faut observer que sin. α, lorsque les forces agissent dans un même plan, est substitué à cos. 6 qu'on introduit dans l'analyse lorsque ces forces ont des directions quelconques (voyez la notation convenue à l'art. cité) et doit par conséquent, avoir les même signes dans des circonstances analogues.

Cette condition sera remplie en prenant positivement les arcs α, lorsqu'à partir de leur origine, sur l'axe des x', ils s'accroissent en commençant par traverser l'angle des x' et y' positives, et en les prenant négativement lorsqu'à partir de la même origine ils sont supposés s'accroitre, en commençant par traverser l'angle des x' positives et y' négatives.

Ces distinctions sont inutiles, quand il s'agit des cosinus, parceque les arcs de même valeurs absolues, positives ou négatives, ont toujours des cosinus de mêmes signes; et voila pourquoi j'ai dit qu'on ne doit rien changer à ce qui a été convenu art. 25, relativement aux signes de ces espèces de quantités.

Valeurs des produits des forces par les perpendiculaires menées, de l'origine, sur leurs directions, en fonctions des coordonnées des points d'applications de ces forces, et des angles qu'elles font avec un des axes coordonnés. Signes de ces produits. Détermination de la résultante de deux forces par la connaissance de leurs points d'applications et des angles qu'elles font avec un axe pris dans leur plan.

Fig. 7 128. Il est nécessaire, avant de passer aux conséquences de la théorie précédente, d'avoir les valeurs de perpendiculaires p', p'', p''', sous une forme qui rende manifeste le signe de chacune d'elles. Soient M le point d'application de la force P', qui agit suivant la ligne $C'B'$, dans le sens $C'B'$, AQ et QM ses coordonnées $x_,$ et $y_,$; je mène la ligne QN perpendiculaire à $C'B'$ et par conséquent parallèle à AP', et AO perpendiculaire à QN ou parallèle à $C'B'$; cette construction donne

$$Angle\ NQM = Angle\ OAQ = Angle\ MC'Q = \alpha'$$
$$AP' = QN - QO = QM \times \cos.\alpha' - AQ \times \sin.\alpha'$$

et substituant les valeurs analytiques

$$p' = y_, \cos.\alpha' - x_, \sin.\alpha'$$

129. Le signe de p' dépend des signes des quantités $x_,$, $y_,$; $\sin.\alpha'$, $\cos.\alpha'$ et des rapports entre leurs valeurs absolues; ainsi, par exmple, lorsque α' sera un angle aigu, p' sera positif tant qu'on aura $y_, > x_, \dfrac{\sin.\alpha'}{\cos.\alpha'}$, ou tant que le point D d'intersection entre la direction de la force P' et l'axe des y, sera, comme dans la figure, du côté des y positives, parce qu'on a $AD = y_, - x_, \dfrac{\sin.\alpha'}{\cos.\alpha'}$. Je rapporterai bientôt tout ce qui concerne ces signes à des considérations simples et générales.

130. En nommant $x_{,,}$, $y_{,,}$; $x_{,,,}$, $y_{,,,}$, respectivement, les coordonnées des points d'application des forces P'' et P''', les conditions de l'équilibre entre ces trois forces, peuvent donc être exprimées par les trois équations suivantes.

$$P'\cos.\alpha' + P''\cos.\alpha'' + P'''\cos.\alpha''' = 0$$
$$P'\sin.\alpha' + P''\sin.\alpha'' + P'''\sin.\alpha''' = 0$$
$$P'(y_,\cos.\alpha' - x_,\sin.\alpha') + P''(y_{,,}\cos.\alpha'' - x_{,,}\sin.\alpha'')$$
$$+ P'''(y_{,,,}\cos.\alpha''' - x_{,,,}\sin.\alpha''') = 0$$

131

131. D'après ce qui a été démontré précédemment, l'une quelconque des trois forces en équilibre étant supposée agir dans un sens contraire à celui de son effort actuel, deviendra la résultante des deux autres, et, réciproquement, en inversant le sens d'action de la résultante, on fait équilibre aux deux composantes. Supposons que R soit la résultante de P' et P'', x et y les deux coordonnées de son point d'application, et α l'angle qu'elle fait avec l'axe des x; les expressions, $R \sin. \alpha$, $R \cos. \alpha$, $R(y \cos. \alpha - x \sin. \alpha)$, devront en changeant leurs signes, et en les introduisant, après ce changement, dans les équations de l'art. précédent, à la place des expressions semblables qui se rapportent à la force P''', remplacer ces dernières à tous égards. Faisant donc les substitutions indiquées on a

$$R \cos. \alpha = P' \cos. \alpha' + P'' \cos. \alpha''$$

$$R \sin. \alpha = P' \sin. \alpha' + P'' \sin. \alpha''$$

$$R(y \cos. \alpha - x \sin. \alpha) = P'(y_{,} \cos. \alpha' - x_{,} \sin. \alpha') + P''(y_{,,} \cos. \alpha'' - x_{,,} \sin. \alpha'')$$

132. Désignant par X, Y et μ, respectivement, les 2[emes]. membres de la première, de la deuxième et de la troisième de ces équations, on a

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}\ ;\ \cos. \alpha = \frac{X}{R}\ ;\ \sin. \alpha = \frac{Y}{R}.$$

$$y = \frac{Y}{X} \cdot x + \frac{\mu}{X}$$

133. p étant la longueur de la perpendiculaire abbaissée, de l'origine, sur la direction de R on a $(y \cos. \alpha - x \sin. \alpha) = p$ et tout est déterminé par les trois équations

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}\ ;\ \cos. \alpha = \frac{X}{R}\ ;\ p = \frac{\mu}{R}$$

134. Ces équations laissent indéterminées la position absolue du point d'application de la résultante et donnent seulement le lieu géométrique des points de sa trace; et, en effet, si on suppose que la ligne de direction de R soit une ligne matérielle liée aux points d'applications des forces P' et P'', on pourra concevoir R comme appliquée à un point quelconque de cette ligne sans que rien soit changé à l'état du système.

135. Le problème que je viens de résoudre et le même, au fond,

que le problème fondamental résolu art. 41 et suivant ; mais on supposait, dans l'article cité, que le point de concours des deux forces était connu, et ici on substitue à cette donnée, d'autres points pris sur les directions des forces ; c'est par ce simple changement de données qu'on déduit, du principe élémentaire de la composition des forces, des équations qui servent ensuite à la formation de toutes celles qu'on employe pour la solution des problèmes de la mécanique analytique.

Composition et conditions de l'équilibre de plusieurs forces agissant sur un plan matériel, et ayant leurs direction dans ce plan.

136. Lorsqu'on a à considérer un nombre indéfini de points d'application des forces, compris dans un même plan, et dont les distances respectives sont invariables, on peut supposer que ces points font partie d'un plan matériel, ou d'une enveloppe plane infiniment mince et inextensible ; rien n'empêcherait, même, qu'on ne les regardât comme tenant à une des sections planes d'un corps de figure quelconque et de forme invariable ; d'après la manière dont nous envisageons les systèmes de corps, en statique (art. 35) tout ce que nous aurons à dire sur la composition et l'équilibre de ces forces s'applique indistinctement à ces diverses hypothèses.

137. Soient $P_{,}$, $P_{,,}$, $P_{,,,}$, etc. les forces qui agissent sur un plan matériel, et dont les directions, sont comprises dans ce plan; $\alpha_{,}$, $\alpha_{,,}$, $\alpha_{,,,}$, etc. les angles respectifs que font ces directions avec un axe fixe, tracé sur le même plan et que je prends pour axe des x. Nommons $x_{,}$, $y_{,}$; $x_{,,}$, $y_{,,}$; $x_{,,,}$, $y_{,,,}$; etc. les coordonnées des points d'applications des forces, $p_{,}$, $p_{,,}$, $p_{,,,}$ etc. les longueurs des perpendiculaires menées de l'origine des x et y sera leurs directions, chacune des quantités désignée par une des lettres α, x, y, p, se rapportant à la force P qui a le même numéro d'accentuation qu'elle.

138. Pour trouver la résultante de toutes ces forces, je commence par en composer deux, prises à volonté ; soient P' et P'' ces deux forces, $\Pi_{,}$ leur résultante dont la ligne de direction, tracée à une distance $\varpi_{,}$ de l'origine des x, fait, avec l'axe des x, un angle $A_{,}$, et a les points de sa trace rapportés, sur le plan matériel, aux deux coordonnées x et y ; on aura d'après l'art. 132

$$\Pi_{,} = \{ (P_{,} \cos. \alpha_{,} + P_{,,} \cos. \alpha_{,,})^2 + (P_{,} \sin. \alpha_{,} + P_{,,} \sin. \alpha_{,,})^2 \}^{\frac{1}{2}}$$

$$y = \frac{(P_, \sin. a_, + P_{,,} \sin. a_{,,})\, x + P_, p_, + P_{,,} p_{,,}}{P_, \cos. a_, + P_{,,} \cos. a_{,,}}$$

Je compose maintenant $\Pi_,$ avec $P_{,,,}$; je nomme $\Pi_{,,}$ la résultante de ces deux forces, $A_{,,}$ l'angle que fait, avec l'axe des x, cette résultante, dont la ligne de direction, rapportée aux coordonnées x et y, est à une distance $\pi_{,,}$ de l'origine des x, et j'ai

$$\Pi_{,,} = \{ (\Pi_, \cos. A_, + P_{,,,} \cos. a_{,,,})^2 + (\Pi_, \sin. A_, + P_{,,,} \sin. a_{,,,}) \}^{\frac{1}{2}}$$

$$y = \frac{(\Pi_, \sin. A_, + P_{,,,} \sin. a_{,,,})\, x + \Pi_, \pi_, + P_{,,,} p_{,,,}}{\Pi_, \cos. A_, + P_{,,,} \cos. a_{,,,}}$$

On trouverait encore en composant $\Pi_{,,}$ avec $P_{,,,,}$, désignant la résultante par $\Pi_{,,,}$, et par $A_{,,,}$, et $\pi_{,,,}$, son angle avec l'axe des x, et sa distance à l'origine des x

$$\Pi_{,,,} = \{(\Pi_{,,} \cos. A_{,,} + P_{,,,,} \cos. a_{,,,,})^2 + (\Pi_{,,} \sin. A_{,,} + P_{,,,,} \sin. a_{,,,,})^2\}^{\frac{1}{2}}$$

$$y = \frac{(\Pi_{,,} \sin. A_{,,} + P_{,,,,} \sin. a_{,,,,})\, x + \Pi_{,,} \pi_{,,} + P_{,,,,} p_{,,,,}}{\Pi_{,,} \cos. A_{,,} + P_{,,,,} \cos. a_{,,,,}}$$

et ainsi de suite, quelque soit le nombre des forces; mais d'après ce qui a été démontré art. 131 on a

$$\Pi_, \cos. A_, = P_, \cos. a_, + P_{,,} \cos. a_{,,}$$
$$\Pi_, \sin. A_, = P_{,,} \sin. a_, + P_{,,} \sin. a_{,,}$$
$$\Pi_, \pi_, = P_, p_, + P_{,,} p_{,,}$$

$$\Pi_{,,} \cos. A_{,,} = \Pi_, \text{c. } A_, + P_{,,,} \text{c. } a_{,,,} = P_, \text{c. } a_, + P_{,,} \text{c. } a_{,,} + P_{,,,} \text{c. } a_{,,,}$$
$$\Pi_{,,} \sin. A_{,,} = \Pi_, \text{s. } A_, + P_{,,,} \text{s. } a_{,,,} = P_, \text{s. } a_, + P_{,,} \text{s. } a_{,,} + P_{,,,} \text{s. } a_{,,,}$$
$$\Pi_{,,} \pi_{,,} = \Pi_, \pi_, + P_{,,,} p_{,,,} = P_, p_, + P_{,,} p_{,,} + P_{,,,} p_{,,,}$$

etc. etc.

139. D'où il suit qu'en faisant, pour abréger

$$P_, \cos. a_, + P_{,,} \cos. a_{,,} + \text{etc.} = X$$
$$P_, \sin. a_, + P_{,,} \sin. a_{,,} + \text{etc.} = Y$$
$$P_, p_, + P_{,,} + P_{,,} p_{,,} + \text{etc.} = \Sigma\,(Pp)$$

désignant la résultante générale par R, la distance de sa direction à l'origine des x par r, les coordonnées de sa ligne de direction par x et y, et l'angle qu'elle fait avec l'axe des x par a, on a

$$\left.\begin{array}{l} R\cos. a = X \\ R\sin. a = Y \\ Rr = \Sigma(Pp) \end{array}\right\} \ldots (A)$$

d'où, en employant la valeur $r = y\cos. a - x\sin. a = \dfrac{Xy - Yx}{R}$

$$\left.\begin{array}{l} R = (X^2 + Y^2)^{\frac{1}{2}} \\ y = \dfrac{Yx + \Sigma(Pp)}{X} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (B)$$

et on pourra, dans la 2eme. équation, substituer à $\Sigma(Pp)$ sa valeur $P_{,}(y_{,}\cos. a_{,} - x_{,}\sin. a_{,}) + \text{etc.}$ ou $\Sigma\{P(y\cos. a - x\sin. a)\}$ en observant que les x et y qui sont sous le signe Σ, et qui représentent les coordonnées particulières des différents points d'application des forces du système, ne doivent pas se combiner avec les coordonnées x et y qui sont en dehors du signe, et qui appatiennent exclusivement à la ligne de direction de la résultante.

140. Une des conséquences de l'analyse précédente est, qu'en général on peut composer en une force unique un nombre quelconque de forces agissants dans le même plan; il est cependant des cas particuliers où cette espèce de composition ne peut pas avoir lieu; je traiterai ces cas quand j'aurai exposé la théorie des *forces parallèles.*

Conditions de l'équilibre d'un nombre quelconque de forces appliqées à un plan matériel, et agissants dans ce plan; observations sur ces conditions.

141. Pour introduire dans les équations (A) de l'article 139 la condition de l'équilibre des forces, il faut énoncer que leur résultante $R=0$; cette condition donne $X^2+Y^2=0$, mais cette somme, composée de deux quarrés essentiellement positifs, ne peut pas être nulle sans que chaque carré ne le soit en particulier, et j'ai déja fait, art. 72, la même observation dans un cas semblable; ainsi on a $X=0$ et $Y=0$; ces valeurs, introduites dans la seconde équation (B) de l'art. 139, mise sous la forme $yX - Yx = \Sigma(Pp)$, donnent $\Sigma(Pp)=0$, et on a pour les conditions complètes de l'équilibre,

$$X=0\ ;\ Y=0\ ;\ \Sigma(Pp)=0$$

142. Ce système d'équations diffère de celui par lequel on exprime les condition de l'équilibre, lorsque toutes les forces sont appliquées à un même point, par l'équation $\Sigma(Pp)=0$, qui n'existe pas dans le cas cité; et il est manifeste, par la manière dont cette équation à été formée, qu'elle doit nécessairement être réunie aux deux autres, si on veut, par l'ensemble des trois équations, exprimer que toutes les forces, dont on a à vérifier l'équilibre, peuvent se réduire, à deux forces égales et agissant en sens contraires; c'est l'état où doivent être, respectivement, l'avant-dernière des composantes Π et la dernière des forces P art. 138. On pourrait, partageant les forces à composer en deux groupes, arriver à deux composantes Π qui seraient dans le même cas, et chaque composante Π suppose, indispensablement, l'existence d'une équation de la forme $yX-xY=\Sigma(Pp)$.

143. Puisque les équations de l'art. 139 n'énoncent, dans le fond, autre chose sinon que les forces du système peuvent se réduire à deux forces égales, et agissant en sens contraires, il est clair que lorsque cette propriété, qui tient exclusivement au système des forces considéré en lui même, se trouve vérifiée pour une certaine position des axes coordonnées, elle doit se retrouver dans tous les changements de positions qu'on peut faire subir à ces axes. Il est aisé de donner une démonstration immédiate de cette proposition. Supposons qu'un nouvel axe des x fasse un angle a avec celui sur lequel on a établi les équations de l'art. 139, les termes qui, pour ce nouvel axe, répondront aux sommes $P_{,}\cos.\alpha_{,}+P_{,,}\cos.\alpha_{,,}+$ etc. $P_{,}\sin.\alpha_{,}+P_{,,}\sin.\alpha_{,,}+$etc. seront $P_{,}\cos.(\alpha_{,}-a)+P_{,,}\cos.(\alpha_{,,}-a)+$etc. ; $P_{,}\sin.(\alpha_{,}-a)+P_{,,}\sin.(\alpha_{,,}-a)+$etc., ou, $\cos.a(P_{,}\cos.\alpha_{,}+\text{etc.})+\sin.a(P_{,}\sin.\alpha_{,}+\text{etc.})$; $\cos.a(P_{,}\sin.\alpha_{,}+\text{etc.})-\sin.a(P\cos.\alpha_{,}+\text{etc.})$ et tous ces produits sont nuls dès qu'on suppose $P_{,}\cos.\alpha_{,}+\text{etc.}=0$, $P_{,}\sin.\alpha_{,}+\text{etc.}=0$, ou, $X=0$ et $Y=0$; ainsi lorsque ces deux équations existent par rapport à deux axes rectangulaires quelconques, pris dans le plan des forces, des équations de même forme existent pour des axes rectangulaires quelconques pris dans le même plan.

Supposons, maintenant, que la nouvelle origine, ou que le point d'intersection de ces derniers axes, soit à une distance ρ de l'origine ancienne, ou de l'intersection des axes primitifs ; désignant par θ l'angle formé par cette ligne ρ et par la direction d'une des forces P,

dont la distance à l'origine ancienne est p, on aura, pour la distance de cette direction à la nouvelle origine, $p+\rho$ sin. θ, et Σ (Pp) sera représenté par $\Sigma\,(Pp)+\rho\,\Sigma\,(P \text{ sin. } \theta)$; mais, d'après ce qui vient d'être dit, si on rapportait les directions des forces à l'axe ρ on aurait $\Sigma\,(P \text{ sin. } \theta)=0$, $\Sigma\,(P \text{ cos. } \theta)=0$, donc la somme des produits des forces par les distances de leurs directions à la nouvelle origine (qui est un point pris arbitrairement dans le plan des forces) est égale à zéro, puisqu'on avait $\Sigma\,(Pp)=0$ par rapport à l'origine primitive.

144. Une conséquence de tout ce qui a été dit depuis l'art. 141, analogue à celle que renferme l'art. 140, est qu'on peut, en général, faire équilibre, avec une seule force, à un nombre quelconque de forces agissant dans le même plan, excepté dans les cas dont il est parlé à l'art. cité et qui seront, aussi, traités après la théorie des *forces parallèles.*

Conditions de l'équilibre d'un nombre quelconque de forces agissant sur un plan matériel qui renferme leurs directions, lorsqu'un des points de ce plan est fixe. Pression qui s'exerce sur le point fixe. Trouver la force unique, qui, dans cet état du système, peut, suivant le sens dans lequel elle agit, être substituée à d'autres forces, ou leur faire équilibre. Indétermination du problème.

145. L'intensité et la direction de la résultante des forces qui agissent dans un même plan sont données art. 139 par les équations

$$R=\sqrt{X^2+Y^2}\,;\; y=\frac{Yx}{X}+\frac{\Sigma\,(Pp)}{X}\,;$$

et il est évident, s'il se trouve un point fixe sur la direction de cette résultante, que son effet sera annullé, et que le système se trouvera en équilibre autour de ce point.

D'une autre part tout point fixe, qui ne serait pas sur la ligne de direction de la résultante, ne rendrait pas son effet nul, car un point matériel, pris sur cette ligne de direction, étant assujetti à décrire un cercle autour du point fixe, l'équilibre ne peut pas exister d'après ce qui a été démontré, art. 101 et suivants, si la ligne et le cercle ne sont pas perpendiculaires l'un à l'autre, c'est-à-dire si la ligne ne passe pas par le centre du cercle ou par le point fixe.

La condition unique d'équilibre, autour d'un point fixe, est donc la

position de ce point sur la direction de la résultante; pour énoncer analytiquement cette condition, j'observe que le terme constant $\frac{\Sigma(Pp)}{X}$ de l'équation $y=\frac{Yx}{X}+\frac{\Sigma(Pp)}{X}$ est la valeur, mesurée sur l'axe des y, de la distance de l'origine des x et y à la ligne de direction de la résultante; ainsi, lorsque cette origine est transportée sur la direction de la résultante, on a $\frac{\Sigma(Pp)}{X}=0$, et partout ailleurs $\frac{\Sigma(Pp)}{X}$ a une valeur finie; or cette même origine peut être un point quelconque du plan dans lequel agissent les forces, donc la condition spéciale et exclusive, qui, lorsqu'elle est remplie, assure la position, sur la direction de la résultante, d'un point quelconque, pris dans le plan des forces, s'énonce en disant que $\frac{\Sigma(Pp)}{X}=0$, bien entendu que les distances p ont ce point pour origine commune.

146. Divisant par X, on a pour les conditions de l'équilibre, autour d'un point fixe situé dans le plan matériel qui renferme les directions des forces, l'équation unique

$$\Sigma(Pp)=0$$

le point fixe, lorsque cette équation a lieu, se trouvant nécessairement sur la résultante et ne s'y trouvant que dans ce cas.

147. Cette résultante a pour valeur $\sqrt{X^2+Y^2}$, c'est la force dont le point fixe annulle l'effet, c'est, par conséquent, l'effort qu'il a à supporter.

148. Il est à remarquer que cet effort est égal à celui que le point fixe aurait à supporter, si les forces du système lui étaient immédiatement appliquées, chacune parallelement à sa direction; car, dans ce cas, la résultante serait, art. 69, identique en intensité, direction et sens d'action, avec celle dont je viens de donner la valeur.

149. Lorsque le point fixe ne se trouve pas sur la direction de la résultante, l'équilibre n'a pas lieu, ainsi que je l'ai dit précédemment, c'est-à-dire que, par rapport à ce point, $\Sigma(Pp)$ est une quantité finie, positive ou négative; soit r la distance, à ce même point, de la direction d'une force R, et posons l'équation $Rr=\Sigma(Pp)$; en se donnant arbitrairement l'une des quantités R ou r, l'autre sera connue, et l'équa-

tion $\Sigma(Pp) - Rr = 0$, nous apprend qu'on aura un système en équilibre, en ajoutant aux forces données une nouvelle force R agissant à une distance r du point fixe.

150. Imaginons un point d'arrêt à l'extrémité de r, qui empêche le système de tourner autour de l'origine, si la force R agissait seule elle presserait ce point avec son énergie entière parceque sa direction étant perpendiculaire sur r, elle ne fait, art. 57, aucun effort sur le point fixe et n'éprouve par conséquent aucune réaction de sa part; mais l'équation

$\Sigma(Pp) - Rr = 0$ donne $R = \frac{\Sigma(Pp)}{r}$ donc le système des forces P', P'' etc. fait contre un obstacle, placé à une distance r du point fixe, un éffort égal à $\frac{\Sigma(Pp)}{r}$, c'est la valeur de la force qui, à la distance r du point fixe, peut remplacer les forces P', P'' etc. quant aux éffets compatibles avec les conditions du systéme.

151. Il y a, comme on voit par l'art. 149, une infinité de forces qui, placées aux distances convenables du point fixe, peuvent faire équilibre aux forces qui agissent autour de ce point; mais ce n'est pas là toute l'indétermination du problème, car une force R qui, agissant à la distance r du point fixe, établit l'équilibre, peut aussi le maintenir en faisant tous les angles possible avec une ligne donnée de position dans le plan des forces, pourvu que la direction de cette force reste tangente au cercle qui a le point fixe pour centre et r pour rayon, et que son action s'exerce toujours dans le même sens sur la circonférence; et cet équilibre sera encore maintenu en supposant que les autres forces du système subissent comme la force R, tous les changements de directions possibles, pourvu que ce soit sous les mêmes conditions. En éffet, considérant successivement tous les points du cercle qui a r pour rayon et le point fixe pour centre, comme les points d'applications de la force R, et examinant les signes que peut prendre, dans chacun de ses quatre quarts, la valeur $y \cos. \alpha - x \sin. \alpha$ de r, (x et y étant les coordonnées du point d'application, comptées du point fixe, et α l'angle formé par R et par l'axe des x) eu égard aux changements de signes de x, y, $\cos. \alpha$, et $\sin. \alpha$, et en s'imposant les conditions ci-dessus assignées, on peut aisément s'assurer que l'expression $y \cos. \alpha - x \sin. \alpha$ conserve, à tous

tous les points de la circonférence, le même signe qu'elle a à un de ces points.

152. Soit, A le point fixe, AX et AY les axes des x et y positives, Fig. 8 et du rayon $AC = AB = r$, décrivons la circonférence $CBED$; je dis que, si une force agit tangentiellement à ce cercle dans le sens $A'T$, l'expression y cos. $\alpha - x$ sin. α sera positive à tous les points de la circonférence, en donnant à cos. α et sin. α des signes conformes à ce qui a été dit art. 25 et 127. en effet, faisant $AP = x$ et $PA' = y$, on a, dans le quart de cercle CB, y, x et cos. α positifs, sin. α négatif, dans le quart de cercle BE, x est positif, y, cos. α et sin. α négatifs, dans le quart de cercle ED, x, y et cos. α sont négatifs, sin. α est positif; enfin le quart de cercle DC donne, x négatif, y, cos α et sin. α positifs, et observant qu'on a, dans tous les cas, aux signes près, cos. $\alpha = \frac{y}{r}$ et sin. $\alpha = \frac{x}{r}$, l'expression y cos. $\alpha - x$ sin. α est, à un point quelconque de la circonférence égale à $\frac{y^2 + x^2}{r} = r$.

Le même raisonnement, appliqué au cas où la force agit dans le sens $A'T'$, fera reconnaître que l'expression y cos. $\alpha - x$ sin. α est négative à tous les points de la circonférence, ou qu'elle se réduit à $-\frac{y^2 + x^2}{r}$.

153. J'ai rapporté, pour plus de facilité, les coordonnées x et y à des points pris sur la circonférence du cercle $BEDC$, mais mes résultats n'en sont pas moins généraux, vu que, pour une direction et un sens d'action déterminé d'une force, l'expression y cos. $\alpha - x$ sin. α ne change ni de valeur ni de signe quelque soit le point de sa direction auquel se rapporte les coordonnées x et y; c'est ce que rend manifeste la construction sur laquelle la démonstration de l'art. 128 est fondée.

154. Ainsi ayant un nombre indéfini de forces, sur les directions desquelles on abaisse des perpendiculaires du point commun A, pour déterminer, sur le champ, les signes des produits Pp qui appartiennent à ces forces, on imaginera des cercles ayant le point A pour centre; et pour rayons les différentes ligne p; et Pp, pour chaque force, sera positif ou négatif, respectivement, suivant que l'action de la force sur la circonférence à laquelle sa direction est tangente, aura lieu dans le

sens $BEDC$ ou $BCDE$. On voit que le signe d'un produit Pp dépend du sens dans lequel la force P tend à faire tourner le système.

Cette manière de déterminer le signe de Pp ne suppose pas du tout que le point A soit fixe, et s'applique tout aussi bien à un système libre qu'à un système qui ne l'est pas; elle peut donc être employée dans la vérification de la troisième équation (A) de l'art. 139, et de la 3ème. équation de l'art. 141. Ces troisièmes équations se vérifient, par conséquent, indépendamment des directions absolues des forces autour des cercles sur la circonférence desquels elles agissent; mais les 1ère. et 2ème. équations, qui les acompagnent, introduisent, dans l'analyse, les expressions et les conditions relatives aux directions effectives de ces forces.

Les détails dans lesquels je viens d'entrer, renferment les considérations simples et générales que j'ai annoncées à la fin de l'art. 129; ces considérations se déduisent ordinairement de la théorie du *levier*, dont l'art. 145 et les suivans offrent les principes généraux; je ferai voir, par la suite, comment elles sont liées, à cette théorie, mais il était bon de les obtenir d'abord, comme conséquences immédiates des premières notions de l'équilibre.

155. Les exceptions dont j'ai parlé art. 140 et 144 n'ont point lieu dans le cas d'équilibre autour d'un point fixe que je viens de traiter, et cet équilibre peut toujours s'obtenir au moyen d'une seule force, celle dont le produit par la distance de sa direction au point fixe a une valeur égale à la somme $\Sigma(Pp)$, fournie par les forces appliquées au système, et un signe contraire à celui de cette somme.

156. Cette force qui établit l'équilibre étant, comme on a vu, susceptible d'un nombre indéfini de valeurs, lorsqu'on place sa ligne de direction à différentes distances du point fixe, et la même indétermination ayant lieu pour l'une quelconque des forces appliquées au système, ensorte qu'on peut, sans rien changer à la valeur ni au signe de $\Sigma(Pp)$, substituer une force arbitraire Π à l'une quelconque des forces P, pourvu que Π agisse à une distance ϖ du point fixe et dans un sens tel que $\Pi\varpi$ et Pp soient de même valeur et de même signe, il résulte de cette possibilité de faire varier arbitrairement les intensités et les directions de plusieurs forces en équilibre autour d'un point fixe, que la pression de ce point fixe, dont j'ai donné, art. 147, l'expression générale, applicable au cas traité depuis l'art. 145, est susceptible d'une infinité de valeurs compa-

tibles avec l'équilibre. Elle a un maximum et un minimum, si on conserve à chaque force son intensité et sa distance au point fixe, et peut varier de zéro à l'infini, si une ou plusieurs forces du système sont remplacées, avec les conditions prescrites ci-dessus. On peut aussi se donner pour condition que la pression du point fixe ait lieu dans une certaine direction et dans un certain sens. Les questions qui naissent de ces observations et qui intéressent, particulièrement, la mécanique appliquée, sont aisées à résoudre, d'après la théorie exposée dans les art. précédents.

Des moments. Leurs définitions; moment *maximum*, pour chaque point d'un système : Composition et décomposition des moments analogue à celle des forces. Moment *minimum maximorum* pour le système entier.

157. Depuis que j'ai commencé, art. 117, à avoir égard à l'*étendue* et à la *figure* dans les systèmes auxquels les forces sont supposées appliquées, les formules, relatives à la composition et aux conditions d'équilibre de ces forces, ont constamment offert des termes de la forme Pp, qui sont les produits des forces par les perpendiculaires menées d'un point déterminé sur leurs directions; on a dû remarquer que ces termes étaient introduits dans l'analyse par la solution du problème fondamental, art. 122, qui avait pour objet la recherche des conditions de l'équilibre d'un système de trois points, et qu'ils composaient l'équation servant à exprimer la condition du concours, en un point commun, des directions des trois forces appliquées à ces points.

Ces produits, que nous retrouverons jusques à la fin du cours, tant dans les formules d'équilibre que dans celles du mouvement, s'appellent *moments* des forces; le point fixe, origine commune des perpendiculaires menées sur leurs directions, est le *centre des moments*, et en désignant ce point par A, on dit que les *moments* sont pris par rapport au point A.

158. J'ai employé, art. 89, le mot *moment* dans une autre acception, et c'est même la première qu'il ait eue; mais lorsque j'aurai à parler de l'espèce de *moment*, dont il est question dans cet article, je m'expliquerai de manière à éviter toute équivoque.

159. On peut, au moyen de ce nouveau mot, énoncer, d'une manière abrégée, les théorèmes que fournissent les interprétations de la troisième

équation (A) de l'art. 139, de la troisième équation de l'art. 141, et de l'équation de l'art. 146, en disant 1°. « que le moment de la résul« tante de plusieurs forces qui agissent dans un même plan sur un système « libre, est égal à la somme des moments des composantes; 2°. qu'une « des conditions de l'équilibre de ces forces est que la somme de leurs « moments soit égale à zéro. 3°. que cette seule condition assure l'équi« libre autour d'un point fixe, situé dans le plan des forces, lorsque les « moments sont rapportés à ce point. »

160. On emploie aussi, en mécanique, les *moments* des forces par rapport à des lignes ou à des axes, qu'on appelle *axes des moments*: soit P une de ces forces, θ l'angle qu'elle fait avec l'*axe des moments*, et r la plus courte distance de sa direction à cet axe, son *moment*, par rapport à ce même axe, sera $P r$ sin. θ; on sait art. 54, que P cos. θ et P sin. θ sont, respectivement, les composantes de P parallèle et perpendiculaire à l'axe des moments.

161. Enfin, lorsqu'il s'agit de *forces parallèles*, le produit d'une de ces forces P, par la distance de son point d'application à un plan, est appellé *moment* de P par rapport à ce plan, l'angle que forme la direction de la force avec le même plan, pouvant, d'ailleurs être quelconque, Souvent, dans une équation qui renferme des produits pareils, on substitue, aux distances *normales*, des distances mesurées sur des lignes obliques parallèles entr'elles.

162. La force P faisant, avec les axes des x, y, z les angles respectifs α, 6, γ, voici comment on trouve son moment par rapport à chacun de ces axes. Supposant, pour fixer les idées, que les trois cosinus cos. α, cos. 6, cos. γ, soient positifs, ce qui, art. 25, détermine le sens d'action de la force; je prends sur la direction de P, à partir de son point d'application, et du côté vers lequel elle pousse ce point, une longueur égale à l'unité, et pour avoir, d'abord, le moment par rapport à l'axe des z, je projete cette longueur sur le plan xy, et je mène par l'origine de sa projection, qui est la projection du point d'application de la force, et par son extrémité, deux lignes respectivement parallèles aux axes des x et des y. Cette construction me donne un triangle rectangle dont l'hypothénuse, projection de l'unité de longueur, est le sinus de γ; le côté parallèle aux x est le cosinus de α et le côté parallèle aux y est le cosinus de 6. La perpendiculaire,

menée de l'origine des x, sur l'hypothénuse de ce triangle prolongée, est égale à la plus courte distance entre la direction de P et l'axe des z, et, nommant r cette perpendiculaire, le moment cherché est, art. 160, égal à Pr sin. α; il s'agit de trouver la valeur de r.

Pour y parvenir, j'observe que le triangle rectangle dont je viens de parler, donne, pour le cosinus et le sinus de l'angle formé par l'hypothénuse de ce triangle (ou par la projection orthogonale de la direction de la force sur le plan xy) et par l'axe des x, les valeurs respectives . . . $\frac{\cos.\alpha}{\sin.\gamma}$, $\frac{\cos.\beta}{\sin.\gamma}$, et on se retrouve dans le cas traité, art. 128, en observant que cos. α' et sin. α' sont ici représentés par $\frac{\cos.\alpha}{\sin.\gamma}$ et $\frac{\cos\beta}{\sin.\gamma}$, et qu'il faut, au point d'application de la force, substituer la projection de ce point sur le plan xy; on a donc, comme à l'article cité, $r = y\frac{\cos.\alpha}{\sin.\gamma} - x\frac{\cos.\beta}{\sin.\gamma}$ et le moment de la force P par rapport à l'axe des z est, art. 160, $P\sin.\gamma\left(\frac{y\cos.\alpha}{\sin.\gamma} - \frac{x\cos.\beta}{\sin.\gamma}\right)$ ou $P(y\,\text{c}.\alpha - x\,\text{c}.\beta)$

163. On trouvera, en raisonnant de la même manière sur chacun des axes, que les moments de la force P sont,

$$\text{par rapport à l'axe}\begin{cases}\text{des } x \,.\,.\,.\,.\,.\; P(z\cos.\beta - y\cos.\gamma)\\ \text{des } y \,.\,.\,.\,.\,.\; P(x\cos.\gamma - z\cos.\alpha)\\ \text{des } z \,.\,.\,.\,.\,.\; P(y\cos.\alpha - x\cos.\beta)\end{cases}$$

expressions qu'il est bon de fixer dans sa mémoire.

Chacun de ces trois moments ne change ni de valeur ni de signe, quelques soient les valeurs de x, y et z, c'est-à-dire, quelque soit le point de la direction de P où on suppose cette force appliquée. Cette valeur et ce signe pour un des moments en particulier, restent les mêmes si la ligne de direction de P change, de manière que P agisse toujours tangentiellement à la surface d'un cylindre ayant pour axe, celui des axes coordonnés auquel se rapporte le moment dont il s'agit, et pour rayon la plus courte distance dont le produit par la force constitue ce moment; il faut, de plus, que le sens de l'action soit partout le même sur la surface cylindrique, et que les angles successifs formés par la ligne de direction de la force, et par les génératrices de la surface cylindrique, soient tous

égaux entr'eux, et à l'angle initial de l'axe auquel on rapporte le moment, et de cette ligne qu'on pourrait, ainsi, rendre continuellement tangente à une *hélice*, tracée sur le cylindre. Je donnerai bientot la relation qui lie, entr'eux, les trois moments rapportés à chacun des axes coordonnés, et il est facile, d'ailleurs, de se rendre raison de ce que je viens de dire d'après ce qu'on a vu art. 152 et suivants.

164. Prenons, dans l'espace, un point dont les coordonnées, respectivement parallèles aux x, aux y et aux z, soient a, b et c, et considérons ce point comme la commune intersection de trois nouveaux axes des coordonnées ξ, η et ζ, la première parallèle aux x, la seconde aux y, et la troisième aux z; les moments respectifs de la force P rapportés à ces axes seront $P(\xi \cos. \mathit{6} - \eta \cos. \gamma)$; $P(\xi \cos. \gamma - \zeta \cos. \alpha)$; $P(\eta \cos. \alpha - \xi \cos. \mathit{6})$; en observant que les angles α, $\mathit{6}$ et γ sont les mêmes pour les axes des x, y, z, et pour ceux des ξ, η et ζ.

165. Substituant, dans ces expressions, à ξ, η et ζ leurs valeurs $x-a$, $y-b$ et $z-c$, on a les valeurs suivantes des moments rapportés à trois nouveaux axes, parallèles aux premiers, et dont l'origine a pour coordonnées les longueurs arbitraires, a, b, c.

moment par rapport à l'axe des
$$\left\{\begin{array}{l} \xi \;.\;.\;.\; P\,\{z \cos. \mathit{6} - y \,\mathrm{c}.\, \gamma - (c \,\mathrm{c}.\, \mathit{6} - b \,\mathrm{c}.\, \gamma)\} = l \\ \eta \;.\;.\;.\; P\,\{x \cos. \gamma - z \,\mathrm{c}.\, \alpha - (a \,\mathrm{c}.\, \gamma - c \,\mathrm{c}.\, \alpha)\} = m \\ \zeta \;.\;.\;.\; P\,\{y \cos. \alpha - x \,\mathrm{c}.\, \mathit{6} - (b \,\mathrm{c}.\, \alpha - a \,\mathrm{c}.\, \mathit{6})\} = n \end{array}\right.$$

l, m et n sont des signes abrégés pour les cas où j'aurai à employer ces expressions.

166. Si on multiplie la première de ces expressions par cos. α, la seconde par cos. $\mathit{6}$, et la 3me. par cos. γ la somme des produits sera nulle par elle même, c'est-à-dire, qu'on a $l \cos. \alpha + m \cos. \mathit{6} + n \cos. \gamma = 0$;

167. Ayant les moments de la force P par rapport aux axes des ξ, η et ζ, proposons-nous de déterminer le moment de la même force par rapport à une ligne, que je désignerai par ligne (A), passant par l'origine de ces coordonnées, (c'est-à-dire par le point dont les coordonnées rapportées aux axes primitifs sont a, b et c) et faisant avec les ξ, η et ζ des angles respectifs A, B et C.

Le moment cherché est art. 160, en désignant, par θ l'angle formé par (A) et par P, et par ρ la plus courte distance entre ces lignes, égal à $P\rho \sin. \theta$.

D'une autre part, on démontre, par la géométrie analytique, qu'en

désignant par p, q et r les plus courtes distances de P aux axes des ξ, η et ζ, respectivement, la plus courte distance entre P et (A), désignée par ρ, a pour valeur

$$\rho = \frac{p \sin. \alpha \cos. A + q \sin. \theta \cos. B + r \sin. \gamma \cos. C}{\sin. \theta.}$$

et, art. 162 et suivants, les produits de P par $p \sin. \alpha$, $q \sin. \theta$ et $r \sin. \gamma$ sont les valeurs respectives des moments l, m et n, donc,

$p \sin. \alpha = \frac{l}{P}$; $q \sin. \theta = \frac{m}{P}$; $r \sin. \gamma = \frac{n}{P}$ et substituant ces valeurs dans l'équation ci-dessus on a, pour calculer le moment cherché, l'équation suivante.

168. $\qquad P \rho \sin. \theta = l \cos. A + m \cos. B + n \cos. C.$

Cette formule fournit un moyen simple de trouver le moment d'une force par rapport à une ligne droite quelconque menée dans l'espace, lorsqu'on connaît, un point de la trace de cette ligne, les angles qu'elle forme avec les trois axes coordonnées, auxquels on rapporte la position de ce point, et les moments de la force par rapport à ces axes. En effet, la connaissance des moments qui se calculent par les formules de l'art, 163, et celle des coordonnées a, b et c (moments et coordonnées qui se rapportent aux axes primitifs) donne immédiatement, les moments l, m et n, et ceux-ci étant calculés on n'a plus qu'à ajouter ensemble les produits $l \cos. A$, $m \cos. B$ et $n \cos. C$.

169. Considérons maintenant un nombre indéfini de forces P', P'', P''' etc. appliquées chacune à un point d'un système de force invariable, point dont la position est raportée aux axes des ξ, η et ζ; en conservant les relations de position entre ces axes et ceux des x, y et z conformes à ce qui est dit art. 164, et les sommes respectives des moments de ces forces par rapport aux axes des ξ, η et ζ, étant $l_{,}$, $m_{,}$, $n_{,}$; $l_{,,}$, $m_{,,}$, $n_{,,}$; $l_{,,,}$, $m_{,,,}$, $n_{,,,}$; etc. si on fait

$$l_{,} + l_{,,} + \text{etc.} = L$$
$$m_{,} + m_{,,} + \text{etc.} = M$$
$$n_{,} + n_{,,} + \text{etc.} = N$$

La somme des valeurs des moments de toutes ces forces par rapport à une ligne passant par l'origine des ξ, η et ζ et faisant avec ces coor-

données les angles respectifs A, B et C sera d'après les résultats consignés dans l'art. 168

$$L \cos. A + M \cos. B + N \cos. C.$$

Dorénavant au lieu de l'expression *somme des moments* des forces par rapport à une ligne, ou à un axe, j'employerai l'expression abrégée *moment* des forces par rapport à cette ligne ou à cet axe.

170. Le moment $L \cos. A + M \cos. B + N \cos. C$ varie avec les angles A, B, C et parmi tous les axes passants par un même point, auxquels on peut le rapporter, il y en a un pour lequel sa valeur est un maximum. On facilitera la détermination du moment maximum et celle de son axe, en substituant aux angles A, B et C l'angle que fait cet axe avec le plan $\xi\eta$ et l'angle que sa projection, sur ce plan, fait avec l'axe des ξ; nommant F le premier de ces angles et H le second, la formule de l'art. précédent devient, en observant art. 27, que $\cos. A = \cos. H \cos. F$, $\cos. B = \sin. H \cos. F$ et $\cos. C = \sin. F$

$$L \cos. H \cos. F + M \sin. H \cos. F + N \sin. F$$

égalant séparément à zéro les différentielles par rapport à H et F on a les deux équations

$$-L \sin. H \cos. F + M \cos. H \cos. F = 0$$

$$-L \cos. H \sin. F - M \sin. H \sin. F + N \cos. F = 0$$

d'où on déduit, en accentuant les lettres H, F, A, B, C pour indiquer quelles appartiennent au moment *maximum*.

$$\text{tang. } H_{,} = \frac{M}{L}\,; \quad \text{tang. } F_{,} = \frac{N}{(L^2 + M^2)^{\frac{1}{2}}}$$

et par suite, en faisant $(L^2 + M^2 + N^2)^{\frac{1}{2}} = K$

$$\cos. A_{,} = \frac{L}{K}\,; \quad \cos. B_{,} = \frac{M}{K}\,; \quad \cos. C_{,} = \frac{N}{K}.$$

Expressions qui substituées dans la formule de l'art. 169, donnent pour la valeur du moment *maximum*

$$(L^2 + M^2 + N^2)^{\frac{1}{2}}$$

171. Cette valeur est celle de la quantité que j'ai désignée par K, et on tire cette première conséquence remarquable de l'équation $K^2 = L^2 + M^2 + N^2$, dans laquelle les angles A, B, C, n'entrent pas, que

que la somme des quarrés des moments, par rapport à trois axes rectangulaires, qui se coupent en un point quelconque du système, est constante pour ce point, quelques soient, d'ailleurs, les positions des axes à la commune intersection desquels il se trouve placé. $L^2+M^2+N^2$ est donc comme K, une quantité déterminée, pour chaque point, qui ne change, en général, qu'avec les coordonnées a, b, c, de ce point, et qui peut rester la même, ainsi qu'on le verra bientôt, malgré les variations de a, b et c, si ces variations sont assujetties à une certaine loi.

172. L'axe du moment *maximum* K, fait avec l'axe du moment dont la valeur a été donnée art. 168, un angle que je désigne par ϕ et dont le cosinus a pour valeur

$$\cos.\,\phi = \cos.\,A \cos.\,A' + \cos.\,B \cos.\,B' + \cos.\,C \cos.\,C'$$

ou en substituant les valeurs de cos. A', cos. B' et cos. C'

$$\cos.\,\phi = \frac{L \cos.\,A + M \cos.\,B + N \cos.\,C}{K}$$

173. Le numérateur du second membre de cette équation est la valeur de la somme des moments par rapport à l'axe qui fait avec les ξ, η et ζ, ou avec les x, y et z, les angles respectifs A, B et C; si on représente cette somme des moments par χ, on aura la relation

$$\chi = K \cos.\,\phi$$

Par le point du système auquel se rapportent les moments K et χ, faisons passer un axe qui soit dans un même plan avec ceux de K et de χ et qui forme un angle droit avec l'axe de χ; son angle avec l'axe de K sera complément de ϕ, et son moment, que je désigne par $\chi_{,}$, aura pour valeur

$$\chi_{,} = K \sin.\,\phi$$

les deux équations précédentes donnent $K^2 = \chi^2 + \chi_{,}^2$ et on voit, par ces résultats, et par ceux trouvés, art. 169 et suivants, qu'il existe, à un point donné, entre le moment maximum et les moments dont les axes se croisent au même point des relations analogues à celles qui lient une force à ses composantes.

174. On conclut encore, de l'équation $\chi = K \cos.\,\phi$, que les moments qui ont, pour axes, les génératrices d'un cône, dont l'axe se confond avec celui du moment maximum, sont tous égaux entr'eux.

175. Enfin il résulte, de la même équation $\chi = K \cos. \phi$, que les moments sont zéro pour toutes les lignes menées dans un plan perpendiculaire à l'axe du plus grand moment, et passant par le point auquel ce plus grand moment appartient.

176. Imaginons que toutes les forces du système soient appliquées à un point unique, en conservant leurs intensités, leurs sens d'action, et des directions parallèles à celles qu'elles ont sur leurs différents points effectifs d'application; toutes ces forces, ainsi concourantes en un point, pourront, art. 65, se composer en une seule, qui, en désignant cette résultante par R, et conservant, d'ailleurs, les dénominations de l'art. cité, aura pour valeur

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

et fera avec les axes des ξ, η et ζ ou avec ceux des x, y et z, des angles dont les cosinus seront

$$\cos. \alpha = \frac{X}{R}\ ;\ \cos. \beta = \frac{Y}{R}\ ;\ \cos. \gamma = \frac{Z}{R}$$

Je nommerai ligne (R) la ligne de direction de cette résultante, son origine, la même que celle des ξ, η et ζ, étant placée au point qui a a, b et c pour coordonnées rapportées aux axes primitifs des x, y et z.

177. Les forces qui entrent dans la composition de R ayant des intensités, des directions et des sens d'actions déterminés, il est évident que quelque soit le point de l'espace sur lequel on transporte les actions de ces forces, la résultante R aura toujours la même valeur, le même sens d'action et que toutes les lignes de direction (R) seront parallèles entr'elles et à une ligne fixe dans l'espace.

178. L'introduction de la force R, dans le système, peut avoir lieu sans que rien soit changé à l'état de ce système, relativement aux actions des forces; pour remplir cette condition on laissera subsister les forces, sans changement, aux différents points du système sur lesquels elles agissent, et on appliquera, à l'origine commune de (R) et des ξ, η et ζ, deux groupes de forces uniquement composés des répliques des forces du système, de la manière suivante; chaque force de l'un de ces groupes sera parallèle à l'une de celles qui sont appliquées aux différents points du système, avec la même intensité, et le même sens d'action qu'elle, et aura, dans le second groupe, une force correspondante, qui lui sera égale et directement opposée.

La formation de ces deux groupes ne change donc rien à l'état du système; les moments, par rapports aux axes des ξ, η et ζ, sont les mêmes qu'auparavant, puisque les forces des groupes, étant appliquées à l'intersection commune de ces axes, n'en peuvent donner aucun, et, composant toutes les forces du premier groupe en une seule, on a la résultante R de l'art. 176.

179. En appliquant à un nombre indéfini de forces les moments trouvés art. 164 pour une seule force, désignant par λ, μ et ν, respectivement les moments de ces forces par rapport aux axes des x, y et z, par X, Y et Z les sommes des composantes parallèles à ces axes, et par L, M, N les moments respectifs par rapport aux axes des ξ, η et ζ, c'est-à-dire les valeurs qu'acquierrent l, m et n, dans le cas dont il s'agit ici, les équations de l'art. cité prennent les formes suivantes,

$$\lambda = \Sigma \{ P (z \cos. \delta - y \cos. \gamma) \} ; L = \lambda - (c Y - b Z)$$
$$\mu = \Sigma \{ P (x \cos. \gamma - z \cos. \alpha) \} ; M = \mu - (a Z - c X)$$
$$\nu = \Sigma \{ P (y \cos. \alpha - x \cos. \delta) \} ; N = \nu - (b X - a Y)$$

180. Il est manifeste, à l'inspection de ces valeurs, que les moments primitifs, rapportés aux axes des x, y et z se conservent, sans changement, lorsqu'on fait marcher l'origine de ξ, η et ζ, dont les coordonnées sont a, b et c, sur la ligne (R) en supposant que l'origine de cette ligne se confonde avec l'origine commune de x, y, z et de a, b, c, puisqu'on a, à tous les points de sa trace, $cY - bZ = 0$, $aZ - cX = 0$, $bX - aY = 0$, ces équations étant celles des projections de (R) sur les trois plans coordonnés, rapportés aux coordonnées a, b et c.

Lorsqu'on passe de l'origine des x, y et z à celle des ξ, η et ζ on calcule les moments L, M, N, par les formules de l'art. précédent, en prenant pour données les moments primitifs λ, μ, ν et les coordonnées a, b, c; mais ces moments L, M, N étant connus, si on considère l'origine des ξ, η et ζ comme une nouvelle origine commune des x, y, z et des a, b, c, on verra encore que les moments qui appartiennent à ce nouveau point se maintiennent constants, pour toutes les origines placées sur une parallèle à la ligne (R) menée par ce même point.

181. Dans ces différentes marches des origines des coordonnées sur les parallèles à (R), si les axes de ces coordonnées restent parallèles à des lignes données de position, les moments, par rapport à chaque

axe, en particulier, se conservent ; et dans le cas où cette circonstance n'a pas lieu, ce sont, art. 171, les sommes des carrés des moments qui demeurent constantes.

182 La conséquence des propositions consignées dans les deux art. précédents, est que le moment maximum $K=(L^2+M^2+N^2)^{\frac{1}{2}}$ a une valeur constante, sur tous les points de la trace d'une parallèle quelconque à la ligne (R), valeur qui change lorsque le point, auquel on rapporte ce moment maximum, prend une position hors de la parallèle sur laquelle il était d'abord.

183. Les moments L, M, N, étant aussi, art. 181, constants, chacun en particulier, pour les divers systèmes d'axes parallèles dont les origines sont prises sur la trace d'une même parallèle à la ligne (R), les cosinus $\frac{L}{K}$, $\frac{M}{K}$, $\frac{N}{K}$, art. 170, des angles formés par l'axe de K et par ces axes coordonnés, resteront invariables dans la même circonstance ; donc en suivant une parallèle à la ligne (R), les axes du moment maximum K, rapportés à chaque point de cette parallèle, seront tous, avec elle, dans un même plan.

184. Le cosinus de l'angle formé par l'axe du moment maximum K et par la ligne (R) a pour valeur, en fonction des cosinus (art. 170 et 176) des angles formés par chacune de ces lignes, et par les axes coordonnés, $(XL+YM+ZN):RK$; substituant, dans cette expression, pour L, M et N, leurs valeurs données art. 179, réduisant et désignant, par θ, l'angle dont on vient d'obtenir le cosinus, on a l'équation

$$\cos.\,\theta=\frac{\lambda X+\mu Y+\nu Z}{RK}$$

185. λ, μ et ν sont des moments constants par rapport aux coordonnées, a, b, c, du point auquel appartiennent θ et K, ces moments étant pris par rapport aux trois axes qui se coupent à l'origine commune des x, y, z et des a, b, c ; ainsi θ ne varie qu'avec K, et le produit $K\cos.\,\theta=(\lambda X+\mu Y+\nu Z):R$ est une quantité constante dans tout le système.

186. Si on prend, pour axes des x, une parallèle à la ligne (R), ce qui peut se faire sans nuire, en rien, à la généralité des résultats, cette hypothèse donnera $X=R$, $Y=0$, $Z=0$, d'où, art. 179

$$L=\lambda\,;\ M=\mu+cR\,;\ N=\nu-bR$$

de plus la valeur $K^2 = L^2 + M^2 + N^2$ de l'art. (170)

et la valeur $\cos.\theta = \frac{\lambda X + \mu Y + \nu Z}{RK}$ deviennent respectivement

$$K^2 = \lambda^2 + (\mu + cR)^2 + (\nu - bR)^2 \ldots\ldots (1)$$

$$\cos.\theta = \frac{\lambda}{K} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

187. Ainsi, lorsque l'axe des x est une parallèle à (R), la quantité, constante dans tout le système, $K \cos.\theta$, est égale à la somme λ des moments des forces par rapport à cette parallèle; cette somme des moments est donc, elle même, invariable, c'est-à-dire que, quelque part qu'on mène une parallèle à (R), la somme des moments par rapport à cette parallèle est une quantité donnée.

188. Ces théorêmes sont curieux et importants; les conséquences qu'on en déduit le sont encore davantage. K et $\cos.\theta$ étant réciproquement proportionnels l'un à l'autre, la plus petite valeur de K répond à la plus grande valeur de $\cos.\theta$; donc le plus petit moment maximum de tout le système, celui qui, d'après le langage adopté, doit s'appeller le moment *minimum maximorum*, appartient au point où $\cos.\theta = 1$, c'est-à-dire au point où l'axe du moment maximum est parallèle à la ligne (R), qui, comme on sait, est la ligne de direction de la résultante de toutes les forces du système supposées appliquées en un point commun.

189. On a déja, par l'article 186, la valeur absolue de ce moment *minimum maximorum*, qui se trouve en faisant $\cos.\theta = 1$ dans l'équation $K \cos.\theta = \lambda$, d'où on tire $K = \lambda$. Ainsi le moment dont il s'agit est égal au moment des forces par rapport à une ligne parallèle à (R) qni peut d'ailleurs être située arbitrairement, d'après ce qui est dit à l'art. 187.

190. Maintenant, pour avoir la position de l'axe de ce même moment *minimum maximorum*, axe qu'on a reconnu, art. 188, devoir être parallèle à la ligne (R), il suffit de trouver, parmi les parallèles à cette ligne, celle qui, pour un point quelconque de sa trace, jouit de la propriété du moment maximum, ce qu'on exprimera, art. 175, en disant que les somme des moments des forces, par rapport aux axes qui coupent cette trace à angle droit, sont nulles. Cette hypothèse particularise la ligne cherchée, quoique λ soit un moment donné, qui lui est commun avec

toute autre parallèle à (R), parcequ'on a, de plus, pour cette autre parallèle, les moments $\mu + c\,R$ et $\nu - b\,R$ par rapport à des axes qui la coupent à angle droit. Il faut donc que des trois moments qui entrent dans le deuxième membre de l'équation (1) de l'article 186, les deux derniers, qui appartiennent aux axes perpendiculaires à la ligne (R), s'évanouissent, ce qui donne, $b = \frac{\nu}{R}$, $c = -\frac{\mu}{R}$, la valeur de a restant entièrement arbitraire, et l'axe cherché est une parallèle à l'axe des x, placée à une distance $\frac{\mu}{R}$ du plan $x\,y$ et à une distance $\frac{\nu}{R}$ du plan $x\,z$, λ, μ et ν étant, comme on sait, les valeurs particulières des moments par rapport aux axes des x, y et z dans la position déterminée où se trouvent ces axes.

Cet axe du moment *minimum maximorum* a, avec les axes du système, pour lesquels les moments maxima sont constants, des relations de position remarquables qu'il est intéressant de connaître.

191. En divisant par R^2 l'équation (1) de l'art 186, on a

$$\left(\frac{\mu}{R} + c\right)^2 + \left(\frac{\nu}{R} - b\right)^2 = \frac{K^2 - \lambda^2}{R^2}$$

et cette forme fait aussitôt reconnaître que l'équation dont il s'agit, pour une valeur déterminée de K, appartient à une surface cylindrique rapportée aux coordonnées a, b, c, dont l'axe est parallèle aux a et dont la section, perpendiculaire à l'axe, a un rayon $= \frac{K^2 - \lambda^2}{R^2}$, les coordonnées du périmètre de cette section, comptées de son centre, étant $\frac{\mu}{R} + c$ et $\frac{\nu}{R} - b$.

Fig. 9 Pour construire cette surface, $C\,A\,B$ étant le plan des b, c, qui est le même que celui des y, z, et A l'origine commune des a, b, c et des x, y, z, on portera, sur l'axe $A\,B$ des b et des y, une longueur $A\,H = \frac{\nu}{R}$, et, sur l'axe $A\,C$ des c et des z, une longueur $A\,G = \frac{\mu}{R}$, on tracera $G\,k$ parallèle et égale à $A\,H$, du point k, comme centre, et d'un rayon $= \frac{K^2 - \lambda^2}{R^2}$ on décrira un cercle, qui sera, sur le plan des

b, c, ou des y, z, la base, ou la section transversale, de la surface cylindrique, l'axe du cylindre étant une parallèle aux a et aux x, et par conséquent à (R), menée par le point k.

192. Ainsi le point fixe A étant pris pour origine commune des coordonnées x, y, z et a, b, c, et l'axe des x et des a étant supposé parallèle à la direction de la ligne (R), si de cette origine, on se transporte à une autre, prise sur une parallèle à l'axe des x et des a, et par conséquent à la ligne (R), dont les coordonnées soient b et c, tous les moments maxima, appartenants aux différents points de cette parallèle, seront égaux entr'eux et à $\{\lambda^2+(\mu+cR)^2+(\nu-bR)^2\}^{\frac{1}{2}}$, et cette même valeur sera encore celle des moments maxima appartenants, à touts les points d'une surface cylindrique à base circulaire, ayant son axe parallèle à la ligne (R) et placé, d'ailleurs, comme il est dit art. 190.

193. Le rayon de la base de cette surface étant égal à $\frac{K^2-\lambda^2}{R^2}$, on voit que la surface cylindrique à laquelle appartient un moment K, constant pour cette surface, est d'autant plus éloignée de l'axe commun, que ce moment K est plus grand ; ensorte que si on imagine une infinité de cylindres concentriques, à bases circulaires, ayant pour axe commun une parallèle à la ligne (R), dont la position est déterminée art. 190, les moments constants, appartenants aux génératrices des surfaces cylindriques, iront continuellement en croissant, ou en décroissant, suivant que ces surfaces s'éloigneront ou s'approcheront de leur axe commun.

194. L'accroissement de ces moments n'a point de bornes; en effet quelque valeur qu'on suppose au moment maximum K, on déterminera toujours le rayon $\frac{K^2-\lambda^2}{R^2}$ de l'enveloppe cylindrique sur laquelle il conserve constamment cette valeur; il n'en est pas de même de la diminution, qui a une limite puisque les moments maxima K diminuent avec les rayons des enveloppes cylindriques; le plus petit moment maximum doit répondre au rayon évanescent, et ainsi ce moment a lieu lorsque $\frac{K^2-\lambda^2}{R^2}=0$, ou lorsque $K=\lambda$.

195. La valeur qu'on vient d'assigner au moment *minimum maximorum*, et la position de la ligne à laquelle il appartient, déterminée

art. 191, sont les mêmes qu'on avait trouvées dans les articles précédents; et on voit, de plus, que cette ligne est l'axe commun de toutes les enveloppes cylindriques sur chacune desquelles le moment maximum est constant.

196. Cette dernière propriété doit nécessairement appartenir à un axe unique, dans le système, car si on supposait qu'elle appartint à plusieurs axes, des points pris sur différentes enveloppes concentriques appartenant à l'un de ces axes, pourraient se trouver sur une même enveloppe appartenant à un autre axe; les moments maxima, relatifs à ces points, seraient donc variables sur les premières enveloppes et constants sur la dernière, ce qui est une conséquence absurde. Au reste, la vérité que je viens de démontrer, par des considérations immédiates, est une conséquence manifeste de l'analyse des art. précédents.

197. Il est bon de pouvoir conclure la position de l'axe du moment *minimum maximorum* et la valeur de ce moment, de la connaissance de la valeur d'un moment maximum rapporté à un point quelconque du système, et de l'angle θ formé par l'axe de ce moment et par la ligne (R), indépendamment de toute considération d'axes coordonnés; voici comment on y parvient. Je transporte l'origine commune des x, y, z et des a, b, c à un des point de l'axe du moment *minimum maximorum*, et je compte les x et les a sur ce même axe. Dans cet état de choses, on a $\mu = 0$, $\nu = 0$, et le moment maximum K, pour un point quelconque, est, art. 186, déterminé par les coordonnées a, b, c, (a étant arbitraire), au moyen de l'équation

$$K = \{ \lambda^2 + c^2 R^2 + b^2 R^2 \}^{\frac{1}{2}}$$

et les cosinus des angles A', B', C' formé par l'axe de K et par les axes des x, y et z sont respectivement

$$\cos. A' = \frac{\lambda}{K}; \quad \cos. B' = \frac{cR}{K}; \quad \cos. C' = -\frac{bR}{K}.$$

Je suppose maintenant, que le point, auquel se rapporte ce moment K, est sur l'axe commun des z et des c; cette hypothèse donne $b = 0$, d'où $\cos. C' = 0$, et l'axe de K se trouve ainsi à angle droit sur l'axe des z c'est-à-dire sur le rayon de l'enveloppe cylindrique pour laquelle le moment K est constant. Donc le plan qui renferme l'axe de K et la génératrice de la surface cylindrique, où la parallèle à (R) passant par

par le point auquel K appartient, est un plan tangent à cette surface cylindrique, plan qui est en même temps celui de ξ, η.

Puisque l'axe de K est compris dans le plan des ξ, η on a $\cos A' = \cos.\theta$, ou $\frac{\lambda}{K} = \cos.\theta$, $\frac{cR}{K} = \sin.\theta$, d'où on conclut

$$\lambda = K\cos.\theta;\ c = \frac{K\sin.\theta}{R}.$$

J'ai supposé que le point, auquel K appartient, se trouvait sur l'axe des z ou des c, mais, comme on peut, dans le plan $y\,z$, ou bc, donner à cet axe une position quelconque et que dans toutes ces positions, à une même distance c de l'origine, on a, constamment les mêmes valeurs absolues que ci-dessus, les équations que je viens de poser seront donc applicables à tous les points de l'enveloppe cylindrique qui a c pour rayon, et on pourra toujours déduire des équations précédentes, deux des quatre quantités, c, λ, K et θ lorsque les deux autres seront connues.

Si les données sont K et θ, on menera, par le point auquel K appartient, une perpendiculaire au plan qui renferme la parallèle à (R), passant par ce point, et l'axe de K, et, par le point de cette perpendiculaire, placé à une distance $\frac{K\sin.\theta}{R}$ du plan dont je viens de parler, on menera une parallèle à (R) qui sera l'axe du moment *minimum maximorum*, la valeur de ce moment étant $K\cos.\theta$; ces déterminations sont, comme on voit, dégagées de toutes considérations d'axes coordonnés

198. Chaque axe du moment maximum K, pris sur une même enveloppe cylindrique, faisant avec la génératrice, qui passe par le point auquel ce moment appartient, un angle constant dont le cosinus $= \frac{\lambda}{K}$, et se trouvant, de plus, tangent à cette même enveloppe cylindrique, l'ensemble de tous ces axes, forme une nappe hyperboloïde, surface du second ordre dont l'équation et les propriétés sont bien connues.

199. On doit mettre au rang des plus belles et des plus utiles vérités de la science de l'équilibre et du mouvement, celles dont les articles précédents renferment les démonstrations, et, plus les élèves avanceront dans l'étude de la mécanique, plus ils en sentiront l'importance. Les

théorèmes des art. 170 et 171, sur la valeur et la position de l'axe du plus grand moment, à un point quelconque, sont dûs à Euler qui les a démontrés dans le tome 7 des nouveaux actes de Pétersbourg; le surplus de cette théorie, qui en forme la partie la plus brillante, est de l'auteur de la *Mécanique céleste* et se déduit, comme conséquence, de sa théorie du *plan invariable*, dont j'aurai occasion de parler aux élèves dans les sections du cours où je traiterai du mouvemement des corps solides. Enfin, Mr. Poinsot, ancien élève de l'École, et Inspecteur général de l'Université, a publié dans le 13e. cahier du journal de cette École, un mémoire fort intéressant où il démontre, avec autant de simplicité que de clarté, par sa théorie des *couples*, (j'expliquerai bientot aux élèves la signification de ce mot) tout ce que j'ai démontré depuis l'art. 157 en suivant une autre marche d'analyse et de raisonnement; Mr. Poinsot développe, dans le même mémoire, les applications, aux questions de mouvement, de la théorie des moments, fondées sur l'identité de ces moments et des *aires*. Je vais faire quelques rapprochements qui serviront à préparer l'intelligence de ces applications réservées pour la seconde partie du cours.

Rapports entre les *moments* et les *aires*.

200. Les propositions que j'ai démontrées, sur les *moments*, depuis, l'art. 157, ne sont encore, en substituant aux forces les lignes qui les représentent, que de simples vérités géométriques, du moins pour les cas des systêmes à trois dimensions, et ne deviendront des vérités de statique analytique, que lorsque j'aurai fait voir leurs relations avec les formules et les équations de condition générales de cette partie de la mécanique. Quelques propositions fondamentales de l'autre partie de la même science, de celle qui a le mouvement pour objet, peuvent aussi être, d'abord, envisagées sous un point de vue purement géométrique, et, ce qu'il y a de remarquable, c'est que ces dernières propositions ne diffèrent des premières dont j'ai parlé dans cet article, que par les expressions qu'on emploie pour les énoncer; il est donc aussi important que curieux de faire voir l'identité des unes et des autres; ce rapprochement me fournira l'occasion de rappeler, en peu de mots, les principaux résultats obtenus dans les 43 art. précédents, résultats que je présenterai sous une forme absolument géométrique.

201. Le signe P, qui représente l'intensité d'une force, étant considéré comme désignant la longueur d'une ligne prise sur la direction de cette force, le produit de P par la perpendiculaire p menée, d'un point fixe, sur P prolongée, est le double de l'aire d'un triangle ayant P pour base et son sommet au point fixe.

Cette aire double, ou ce produit Pp, est ce que nous avons appelé moment de P par rapport à un axe perpendiculaire au plan de ce triangle et passant par son sommet.

202. L'aire du triangle ne changera pas quelque part que la base soit placée sur la direction de P, pourvu que la longueur de cette base et la position du point où se trouve le sommet restent les mêmes; c'est la propriété des moments énoncée art. 153 et 163.

203. Si, par le sommet du triangle, on mène un axe, dans une direction quelconque, l'aire de la projection orthogonale de ce triangle, sur un plan perpendiculaire a l'axe, aura une valeur constante, quelques soient les positions du sommet, sur ce même axe, et de la base sur la direction de P. De plus θ étant l'angle formé par cette direction et par l'axe du plan de projection, (complément de celui que forme ce plan de projection avec la ligne P) et r la plus courte distance entre les deux lignes, le double de l'aire de la projection orthogonale sera $Pr \sin. \theta$, c'est art. 160 le moment de la force par rapport à l'axe du plan de projection qui ne dépend ni de la position absolue du point d'application de la force ni de celle du plan de projection sur l'axe de ce plan.

204. Par le même sommet du triangle je fais passer les trois axes coordonnés des x, y et z avec lesquels la base P fait les angles respectifs α, δ et γ, compléments de ceux qu'elle forme avec les plans yz, xz et xy. En désignant par p, q et r les plus courtes distances, respectives, entre P et les axes des x, y et z, les projections du double de la surface du triangle, sur les plans dont je viens de parler sont $Pp \sin. \alpha$, $Pq \sin. \delta$ et $Pr \sin. \gamma$, ou art. 162 et 163 les moments de la force P par rapport à chacun des axes.

205. Faisant passer, par l'origine, un plan dont les angles respectifs avec les plans yz, xz et xy sont désignés par A, B et C, le double de la projection orthogonale du triangle, sur ce plan, aura pour valeur $P(p \sin. \alpha \cos. A + q \sin. \delta \cos. B + r \sin. \gamma \cos. C)$, c'est, art. 167, l'expression du moment de la force P par rapport à une ligne passant par

l'origine des x, y et z et faisant avec les axes des x, y et z perpendiculaires aux plans yz, xz et xy, les angles A, B et C.

206. Enfin si on construit plusieurs triangles ayant tous leurs sommets placés à l'origine des x, y et z et leurs bases P', P'', P''' etc. situées d'une manière quelconque, dans l'espace, en désignant par p', p'' etc. q', q'', etc. r', r'' etc. a', a'' etc. $6'$, $6''$, etc. γ', γ'', etc. les quantités qui sont, par rapport à ces triangles, ce que p, q, r, a, 6, γ, étaient par rapport au triangle unique considéré dans les art. précédents, et faisant $\Sigma(Pp \sin. a)=\lambda$, $\Sigma(Pq \sin. 6)=\mu$, $\Sigma(Pr \sin. \gamma)=\nu$, la double somme des projections de tous ces triangles sur un plan passant par l'origine et faisant avec les plans yz, xz et xy les angles respectifs A, B et C, cette double somme, dis-je, a pour valeur

$$\lambda \cos. \alpha + \mu \cos. 6 + \nu \cos. \gamma$$

expression qui est celle de la somme des moments de P', P'' etc., considérées comme des forces, par rapport à un axe passant par l'origine des x, y et z et faisant avec les axes de ces coordonnées les angles A, B et C.

207. Parmi tous les plans qu'on peut mener par l'origine des x, y et z, celui, sur lequel la somme des projections orthogonales des triangles est un maximum, forme avec les plans yz, xz et xy, des angles dont les cosinus respectifs sont,

$$\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}\,;\quad \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}\,;\quad \frac{\nu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}$$

et le dénominateur $\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}$ est la valeur du double de cette plus grande somme.

La somme des projections est nulle sur tous les plans perpendiculaires à celui dont on vient d'assigner la position, et, en général, ϕ étant l'angle qu'il forme avec un autre plan quelconque, la double somme des projections, sur ce dernier plan, a pour valeur $(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)^{\frac{1}{2}} \cos. \phi$.

On retrouve ici le théorême du plus grand moment, rapporté à l'origine primitive des x, y et z, et, par suite, à une origine quelconque, en changeant seulement les valeurs de λ, μ et ν.

208. En mettant, bout-à-bout, une suite de lignes égales et parallèles aux lignes P', P'', etc. conformément à ce qui a été dit art. 75 et 76,

on formera un poligone qui, en général, sera ouvert, et quelque soit la position de ce polygone, dans l'espace, et l'ordre dans lequel on place ses côtés l'un à la suite de l'autre, la ligne droite menée de l'*origine* du premier côté, à l'*extrémité* du dernier, sera constamment parallèle à une droite de position fixe que je désigne par (R).

209. L'axe des x étant supposé parallèle à (R), les sommes λ, μ et ν acquerront des valeurs convenables à cette hypothèse, mais λ sera la somme constante du double des projections des triangles, sur un plan parallèle à celui des yz, ou perpendiculaire à (R), et placé d'ailleurs arbitrairement, quelque soit le point de l'espace où viennent aboutir les sommets des triangles qui ont les lignes P', P'', etc. pour bases.

210. b et c étant les coordonnées respectivement parallèles aux y et aux z, de ce point, pris à volonté, auquel on fait aboutir tous les sommets des triangles, si on désigne par R la somme des projections orthogonales des lignes P', P'', etc. sur l'axe des x, ou ligne (R), et qu'on fasse $K=\sqrt{\lambda^2+(\mu+cR)^2+(\nu-bR)^2}$, cette quantité K sera la valeur du maximum de la double somme des projections qu'on peut obtenir sur un plan passant par le point dont b et c déterminent la position; l'angle θ, formé par ce plan, et par le plan yz, perpendiculaire à l'axe des x, ou à la ligne (R), se calculera par l'équation $\cos.\theta=\frac{\lambda}{K}$, les cosinus de ses angles avec le plan xz et le plan xy étant respectivement, $\frac{\mu+cR}{K}$ et $\frac{\nu-bR}{K}$.

La coordonnée, parallèle aux x, ou à (R), du point auquel se rapportent ces déterminations, demeure entièrement arbitraire, c'est-à-dire que toutes les valeurs qu'on vient d'assigner conservent la même valeur sur la parallèle à (R) dont les coordonnées sont b et c.

Il est a remarquer que lorsqu'on compare entr'elles les sommes des projections faites sur des plans perpendiculaires à une même ligne, les sommets des triangles peuvent, art. 203, sur une même parallèle à cette ligne, ne pas aboutir au même point sans que la somme des projections change.

211. Dans le cas où tous les sommets des triangles se trouvent sur une parallèle à (R) et à x, dont les coordonnées respectivement parallèles aux y et aux z sont $\frac{\nu}{R}$ et $-\frac{\mu}{R}$, le plan du maximum de pro-

jection est perpendiculaire à (R), et λ est la double valeur de ce maximum, qui est la plus petite des quantités de son espèce, c'est-à-dire le *minimum maximorum*.

212. L'axe dont on vient de déterminer la position par les coordonnées $\frac{\nu}{R}$ et $-\frac{\mu}{R}$, pourrait servir à fixer les positions de tous les plans, qui, pour les divers points de l'espace auxquels on peut faire aboutir les sommets des triangles, ont la propriété d'être les plans de plus grandes sommes de projections. On a donné, art. 210, la valeur du cosinus de l'angle que l'un quelconque de ces plans, passant par le point dont les coordonnées sont b et c devait faire avec un plan perpendiculaire à (R), et celui-ci étant supposé passer aussi par ce même point, la ligne d'intersection des deux plans devra rencontrer l'axe parallèle à (R) dont les coordonnées respectivement parallèles à b et à c sont $\frac{\nu}{R}$ et $-\frac{\mu}{R}$.

213. La distance entre le point déterminé par b et c, et l'axe du *minimum maximorum*, est égale à $\frac{K \sin. \theta}{R}$, K, θ et R ayant les mêmes significations qu'à l'art. 210, et, lorsque la position du plan auquel K et sin. θ appartiennent est déterminée de la manière prescrite à l'art. cité, la valeur $\frac{K \sin. \theta}{R}$ sert à trouver la position de l'axe du *minimum maximorum* en même temps que l'équation $\cos. \theta = \frac{\lambda}{K}$ donne la valeur K cos. θ de la double somme des projections sur le plan perpendiculaire à cet axe.

214. Tout ce qui est dit depuis l'art. 200, n'est qu'une énonciation particulière des principales vérités dont on a vu les démonstrations depuis l'article 157 jusqu'à l'article 199, et les démonstrations de tous les théorèmes sur les *aires*, ou sur leurs projections, ne seraient que la transcription de celles qui concernent les *moments*. Ces théorèmes s'appliquent, en dynamique, aux *aires* décrites pendant des temps, ou finis ou infiniments petits, par les rayons vecteurs des différents points matériels d'un système en mouvement, et on verra, dans la seconde partie du cours, leur important usage.

Au reste on peut appliquer la théorie que je viens d'expliquer, à des figures quelconques, dont on ferait les projections sur différents plans, et en déduire une foule de conséquences et de propriétés aussi variées que curieuses, mais dont la recherche est absolument étrangère à l'objet de ce traité.

Équilibre et composition des forces parallèles, dans le cas où ces forces agissent sur un système libre, et où leurs lignes de direction sont dans un même plan. Principe du *levier*. Définition et propriétés du *centre* des forces parallèles.

215. J'ai donné, depuis l'art. 120 jusqu'à l'art. 144, la théorie complète de la composition et de l'équilibre des forces qui agissent sur un système *libre*, lorsqu'on s'impose, *à priori*, la condition d'avoir leurs lignes de direction dans un même plan, et quelques soient, d'ailleurs, les angles formés par ces lignes de direction, tant entr'elles qu'avec des lignes fixes situées dans le plan commun.

Les élèves, qui ont étudié cette théorie, se rappelent les deux propositions générales suivantes, sur lesquelles j'ai fixé leur attention, 1°. la résultante de plusieurs forces, qui agissent dans un même plan, a sa ligne de direction dans ce plan. 2°. en réduisant, à son expression la plus simple, l'interprétation des équations qui renferment les conditions de l'équilibre des forces dirigées dans un même plan, on voit qu'elles se réduisent à énoncer que ces forces peuvent être remplacées par deux forces égales et agissant en sens directement opposés.

La première proposition établie, dès l'abord, art. 43, pour deux forces, dont les directions ont un point commun, et leur résultante, s'est trouvée démontrée, art. 138, pour un nombre quelconque de forces agissant dans le même plan, puisqu'il suit évidemment des compositions binaires successives, par lesquelles on est arrivé, article cité, à l'expression générale de la résultante finale, que cette résultante se trouve, dans un même plan, avec les deux premières forces composées et, par conséquent, avec toutes les autres forces.

La seconde proposition a été pareillement établie art. 141, 142 et 143. Elle n'est, d'ailleurs, que l'énoncé d'une vérité, pour ainsi dire intuitive, applicable à toutes les hypothèses possibles d'actions des forces, et consignée dans les art. 40 et 74, où on a vu que l'une quelconque

des forces d'un système en équilibre, qui n'a aucun point fixe, est égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres forces.

On ramène, dans certains cas, comme je le ferai voir dans la suite, le système des forces en équilibre à plusieurs couples de forces égales et directement opposées, mais c'est une affaire de pure commodité.

216. La seconde proposition est donc immédiatement applicable à une combinaison quelconque de forces parallèles; la première doit convenir aussi aux forces parallèles, qui agissent dans un même plan, puisque cette hypothèse sur le mode des forces ne fait qu'introduire, dans les formules générales de l'art. 139, applicables à toutes les valeurs possibles des angles $\alpha_{,}$, $\alpha_{,,}$ etc., les relations particulières $\alpha_{,}=\alpha_{,,}=\alpha_{,,,}=$ etc.

Il est d'ailleurs évident qu'on peut appliquer, à deux forces parallèles, et à leur résultante, le même raisonnement, mot pour mot, qu'on a fait, art. 43, pour prouver que la résultante de deux forces, qui concourent en un point commun, est dirigée dans le plan de ces forces; et comme on peut obtenir la résultante finale d'un nombre quelconque de forces parallèles, par une suite de compositions binaires, en employant la méthode de l'art. 138, si ces forces parallèles agissent dans un même plan, la résultante finale sera nécessairement dans ce plan puisqu'elle sera, par construction, dans le plan des deux premières forces composées.

217. Il reste maintenant a introduire dans les formules générales, données depuis l'art. 120 jusqu'à l'art. 156, et applicables à des forces qui agissent dans un même plan, la condition particulière du parallélisme de ces forces, cette méthode, constamment suivie, dans l'exposition des vérités de la mécanique analytique, réunit, à l'avantage d'être claire et concise, celui d'être parfaitement rigoureuse; cette dernière qualité, surtout, lui appartient essentiellement, car si une conséquence qu'on veut tirer d'une équation vraie, est, ou inexacte, ou incompatible avec les bases sur lesquelles cette équation est établie, l'analyse rend aussitôt manifeste, par les symboles connus, le vice de raisonnement ou l'incompatibilité, et si le résultat obtenu n'est acompagné d'aucune indication pareille, il a un degré de certitude égal à celui de la formule dont il est déduit.

218. Je commence par la composition de deux forces parallèles P' et P''

P'' qui font un même angle A' avc l'axe des x tracé sur le plan de ces forces, p' et p'' étant les perpendiculaires abaissées, sur leurs directions, de l'origine des x et des y.

Je nomme R la résultante de P' et P'', A l'angle que fait cette résultante avec l'axe des x, et r la distance de sa direction à l'origine des x et des y; r, p' et p'' sont, dans le cas dont il s'agit ici, mesurées sur une même droite passant par l'origine des x et des y, et R devant, art. 216, agir dans le plan de P' et P'', il ne reste plus qu'à déterminer sa trace sur ce plan, et son intensité.

Introduisant, dans les deux premières équations de l'art. 131, la condition du parallélisme des forces P' et P'', on a $\alpha'=\alpha''=A'$, et ces équations deviennent

$$R\cos.A=(P'+P'')\cos.A'$$
$$R\sin.A=(P'+P'')\sin.A'$$

et on en déduit

$$R=P'+P'';\ A=A'$$

ainsi la résultante est parallèle aux composantes, égale à leur somme, et la forme des équations, qui donne ces théorêmes, indique clairement qu'ils sont vrais sans restriction; on doit, ainsi, les regarder comme aussi rigoureusement démontrés que les propositions qui seraient l'interprétation immédiate et littérale des équations dont les deux précédentes sont un cas particulier.

L'intensité de la résultante étant connue, on a sa trace, sur le plan des forces, par la troisième équation de l'art. 131, qui donne, en observant que les expressions qui multiplient R, P' et P'', représentent respectivement, art. 128, r, p' et p''

$$r=\frac{P'p'+P''p''}{P'+P''}$$

le moment de la résultante est, dans ce cas des forces parallèles, comme dans le cas des forces non parallèles, égal à la somme des moments des composantes.

x et y, $x_{\prime}$ et $y_{\prime}$, $x_{\prime\prime}$ et $y_{\prime\prime}$ étant les coordonnées respectives des lignes de direction de R, P' et P'', et désignant par α l'angle commun formé par chacune de ces lignes et par l'axe des x, la troisième équation de l'art. 131 devient

$$y = x \text{ tang. } \alpha + \frac{P' y_{,} + P'' y_{,,} - (P' x_{,} + P'' x_{,,}) \text{ tang. } \alpha}{P' + P''}$$

219. On voit, par l'équation $R = P' + P''$, que R doit agir dans le sens de la plus considérable des forces P' et P''; de plus, d'après l'équation $r = \frac{P'p' + P''p''}{P' + P''}$, lorsque P' et P'', agissent dans le même sens, la trace de R, dont la valeur numérique surpasse alors celle de chacune des deux composantes, doit être située entre les traces de ces deux forces; si P' et P'' agissent dans des sens différents, que BP' et CP'' soient leurs directions respectives et leurs sens d'actions, et A l'origine des distances r, p' et p'', comptées sur la ligne AP, perpendiculaire à la direction commune des forces, on aura, $AB = p'$, $AC = p''$ et faisant $CB = p'' - p' = \lambda$, on déduira de l'équation précédente les deux qui suivent

Fig. 10

$$r = p' + \frac{\lambda P''}{P' + P''} \; ; \; r = p'' - \frac{\lambda P'}{P' + P''}$$

lesquelles, dans tous les cas où P' et P'' agissent en sens opposés, donnent $r < p'$, lorsque $P' > P''$, et $r > p''$, lorsque $P'' > P'$; appliquant ces résultats, avec les signes convenables, aux différentes combinaisons des positions des points A, B et C, on verra que, dans toutes les combinaisons de leurs sens d'actions, la plus considérable des trois forces P', P'' et R doit avoir sa trace située entre les traces des deux autres.

Au reste tout ce que je viens de dire peut se conclure facilement de la considération des signes que prennent, dans chaque cas, les expressions de la forme, $y \cos. \alpha - x \sin. \alpha$, et de leurs valeurs, d'après ce qui a été expliqué art. 151 et suivants.

220. λ continuant à désigner la distance entre les directions de P' et P'', si on représente par λ' et λ'', respectivement, les distances entre la direction de R et celles de P' et P'' on aura

$$\lambda = p'' - p' \; ; \; \lambda' = r - p' \; ; \; \lambda'' = p'' - r$$

l'équation $r = \frac{P'p' + P''p''}{P' + P''}$ deviendra $P'\lambda' = P''\lambda''$ d'où $P' : P'' :: \lambda'' : \lambda'$; en composant cette proportion et en la combinant avec l'équation $R = P' + P''$, on a

$$R : P' : P'' :: \lambda : \lambda'' : \lambda'$$

théorème analogue à celui de l'art. 50.

221. L'équation $P' \lambda' = P'' \lambda''$, appliquée au cas où un des points de la résultante est fixe, (cas auquel, art. 145, P' et P'' sont en équilibre autour de ce point) donne le fameux principe de l'équilibre du levier découvert par *Archimède*, il y a environ vingt siècles et demi, et qui forme la proposition 7 du 1er. livre de son traité de l'*équilibre des plans*; c'est la première vérité qu'on ait démontré, par le raisonnement, dans la mécanique rationnelle.

222. Quelque soit le nombre des forces parallèles P', P'', etc. agissant dans le même plan et qu'on veut composer en une seule, on peut avoir la résultante générale par une suite de compositions binaires, comme on a fait à l'art. 138; mais il est plus court de s'appuyer immédiatement sur les résultats de l'analyse contenue dans cet article en introduisant, dans les équations de l'art. 139, la conditon de l'égalité de chacun des angles α', α'', etc. à un angle A', et supposant que la résultante R fait avec l'axe des x un angle A, ce qui donne les équations

$$R \cos. A = \cos. A' \, \Sigma(P)$$
$$R \sin. A = \sin. A' \, \Sigma(P)$$

desquelles on conclut, comme à l'art. 218 où il ne s'agissait que de deux forces

$$R = \Sigma(P)\,;\; A = A'.$$

désignant, par α, la valeur commune A et de A' et adoptant, d'ailleurs, la notation de l'art. 139, on a, pour déterminer la direction de la résultante dont l'intensité est donnée par l'équation $R = \Sigma(P)$, l'une ou l'autre des deux équations

$$r = -\frac{\Sigma(Pp)}{\Sigma(P)}\,;\; y = x \text{ tang. } \alpha + \frac{\Sigma(Py) - \Sigma(Px)\text{ tang. } \alpha}{\Sigma(P)}$$

les x et y, sous le signe Σ, représentent les coordonnées particulières x', x'', etc. y', y'', etc. des points d'application des forces P', P'' etc. et les x, et y, hors du signe, se rapportent, spécialement, aux différents points de la trace de la résultante.

223. Si, dans la seconde des équations précédentes, on fait $x = \dfrac{\Sigma(Px)}{\Sigma(P)}$, le point de la trace de la résultante, correspondant à cette abscisse, aura pour ordonnée $y = \dfrac{\Sigma(Py)}{\Sigma(P)}$. ce point est très-

remarquable ; l'angle α n'entre dans les valeurs d'aucune de ses deux coordonnées, ensorte que c'est un point commun à toutes les directions que peut prendre la résultante, dans l'hypothèse où les forces conservant leurs intensités, leurs points d'application, et leur parallélisme, feraient d'ailleurs tous les angles possibles avec une ligne fixe tracée dans le plan de ces forces.

224. Ce point qui a pour coordonnées $\frac{\Sigma(Px)}{\Sigma(P)}$ et $\frac{\Sigma(Py)}{\Sigma(P)}$ et qui est une espèce de centre fixe de rotation de la ligne de direction de la résultante, s'appelle *centre des forces parallèles.*

225. On a la condition de l'équilibre des forces parallèles qui, dirigées dans un même plan, agissent sur un système libre, en faisant dans les équations de l'art. 141, $\alpha' = \alpha'' =$ etc. $= \alpha$, $\Sigma(P).\cos.\alpha = 0$; $\Sigma(P).\sin.\alpha = 0$, au moyen de quoi ces deux équations se réduisent à l'équation unique $\Sigma(P) = 0$, à laquelle il faut réunir l'autre équation $\Sigma(Pp) = 0$, ou son équivalente

$$\Sigma(Py) - \Sigma(Px)\ \text{tang.}\ \alpha = 0$$

et les mêmes résultats se déduiraient de l'hypothèse $R = 0$, et $\Sigma(P) = 0$, dans les équations de l'art. 222.

226. Un raisonnement, absolument semblable à celui de l'art. 143, prouverait que lorsque ces équations ont lieu par rapport à une certaine origine des p, x, et y et à une certaine direction de l'axe des x, des équations semblables ont encore lieu pour toute autre origine et toute autre direction prises dans le plan des forces.

De l'équilibre des forces parallèles autour d'un point fixe situé dans le plan qui renferme les lignes de direction des forces. Pression de ce point. Détermination de la plus grande et de la plus petite valeur de cette pression. Du cas où le point fixe est placé au *centre des forces parallèles.*

227. Les forces parallèles continuant d'agir dans un même plan, on peut supposer que le système des points matériels auxquels ces forces sont appliquées est assujetti à tourner autour d'un point fixe, situé sur ce plan, et chercher les conditions de l'équilibre relatives à cette hypothèse. D'après ce qui a été dit, art. 145, la recherche dont il s'agit fournit matière à une première détermination, celle de la position à

donner au point fixe pour obtenir l'équilibre, et l'équation, qui exprime les conditions demandées, renferme le terme qui doit être nul lorsque ce point est placé comme il doit l'être.

Or on a vu, à l'art. cité, que l'équilibre avait lieu lorsque le point fixe se trouvait placé sur la trace d'une ligne droite, ayant pour équation $Xy - Yx - \Sigma(Pp) = 0$, et que l'égalité à zéro du terme constant $\Sigma(Pp)$, en exprimait complétement les conditions, l'origine commune des lignes p étant au point fixe; en effet l'équation $\Sigma(Pp) = 0$, suppose l'existence de ce point sur la direction de la résultante, dont l'équation rapportée à deux coordonnées rectangulaires quelconques, prises dans le plan des forces, est $Xy - Yx - \Sigma(Pp) = 0$.

228. Le cas des forces parallèles agissant dans un même plan donne pour l'équation de la direction de la résultante, art. 222,

$$(y - x \tang.\alpha)\,\Sigma(P) - \Sigma(Py) + \Sigma(Px)\tang.\alpha = 0,$$

et tout point fixe, placé sur cette direction, établira l'équilibre; mais en transportant, à ce point, l'origine des coordonnées, l'équation de la trace de la résultante devient $y - x \tang.\alpha = 0$, et on a, pour énoncer que le point fixe a la position dont on vient de parler, et que, par conséquent, l'équilibre a lieu, l'équation

$$\Sigma(Py) - \Sigma(Px)\tang.\alpha = 0$$

l'origine des x et des y étant à ce même point.

229. Cette équation, qui équivaut à $\Sigma(Pp) = 0$, exprime que la somme des moments est nulle par rapport au point fixe.

230. Dans le cas du système libre, art. 225, l'équilibre résultait des deux conditions $\Sigma(Pp) = 0$ et $\Sigma(P) = 0$, mais dans le cas actuel $\Sigma(P)$ est l'effort que le point fixe a à supporter, ce point se trouvant sur la direction de la résultante dont $\Sigma(P)$ est la valeur.

231. On voit ici, comme à l'art. 148, que l'effort exercé contre le point fixe est le même qui aurait lieu si toutes les forces parallèles lui étaient immédiatement appliquées.

232. Enfin, tout ce qui a été dit depuis l'art. 149 jusqu'à l'art. 156, inclusivement, est applicable, sans restriction, aux cas traités depuis l'art. 227; j'ai fait voir, dans les art. cités, les changements qu'on peut faire subir à un système de forces dont les directions sont sur un même

plan, et qui se font équilibre autour d'un point de ce plan, rendu fixe; sans que l'équilibre cesse d'avoir lieu, changements qui permettent de rendre parallèles des forces qui ne le sont pas, ou de détruire le parallélisme de ces forces lorsqu'il existe.

233. J'ai parlé art. 156 d'un minimum et d'un maximum d'effort sur le point fixe; en adoptant la notation de l'art. 139, les conditions d'après lesquelles on obtiendra ce minimum ou ce maximum sont exprimées par l'équation $\Sigma(P \sin. \alpha)\,\Sigma(Pd\alpha \cos. \alpha) - \Sigma(P \cos. \alpha)\,\Sigma(Pd\alpha \sin. \alpha) = 0$, équation qui se rapporte au cas où l'intensité de chaque force et la distance de sa direction au point fixe demeurent constantes; cette force pouvant, d'ailleurs, être appliquée à un point quelconque du cercle qui a, pour rayon, la distance dont je viens de parler et le point fixe pour centre. On a vu art. 151, que l'équilibre continue d'avoir lieu quelque soit ce point d'application pourvu que la force agisse toujours dans le même sens sur la circonférence du cercle auquel sa direction est tangente; mais la valeur de la résultante, ou l'effort qu'elle exerce sur le point fixe varie à chaque changement de position et il s'agit de savoir comment les directions des forces doivent être disposées pour que la différentielle de la résultante soit nulle lorsqu'on fait varier ces directions de quantités infiniment petites. Cette condition sera, d'après l'équation précédente, généralement remplie dans tous les cas où on rendra les forces parallèles entr'elles et par conséquent à la résultante, les relations entre les différentielles $d\alpha_{,}, d\alpha_{,,}$ etc. demeurant absolument arbitraires; ensuite pour obtenir la plus grande des sommes données par les diverses combinaisons de forces, ainsi rendues parallèles, on placera d'un même côté, par rapport au point fixe, toutes celles qui tendent à faire tourner dans un même sens, et de l'autre côté, par rapport au même point, toutes celles qui tendent à faire tourner dans le sens contraire; la pression du point fixe sera égale à la somme totale des forces. Pour avoir le minimum de pression de ces mêmes forces, toujours ramenées au parallélisme, on les placera de part et d'autre du point fixe en les combinant de manière que, R, S, T, etc. étant les forces qui agissent d'un côté de ce point, et R', S', T', etc. celles qui agissent de l'autre côté du même point, on ne puisse pas faire une transposition dans les deux termes de la différence $(R' + S' + T' + \text{etc.}) - (R + S + T + \text{etc.})$ sans augmenter cette différence.

234. Cette pression maximum, cette pression minimum, et, en

général, des pressions déterminées quelconques du point fixe, peuvent, sans changer de valeurs, avoir lieu dans toutes les directions possibles, vu qu'on peut ou rendre toutes les forces parallèles à une ligne passant par ce point fixe, et ayant d'ailleurs une position arbitraire dans le plan des forces, ou faire faire à chacune, avec cette ligne, un angle donné à volonté. Ces propositions sont liées au théorème suivant qui se déduit immédiatement du contenu aux art. 145 et 151 : si on a des forces quelconques, dirigées dans un plan, un point, de position déterminée arbitrairement, sur la direction de leur résultante, sera, la commune intersection de toutes les résultantes qu'on pourra obtenir, en faisant varier à volonté les directions des forces, avec les seules conditions que la distance de chacune de ces directions, au point dont je viens de parler, demeure constante et que le moment de chaque force, par rapport au même point, ne change pas de signe.

235. Ainsi voilà un centre sur lequel les actions combinées des forces se reportent continuellement, dans toutes les positions des points d'applications, compatibles avec l'invariabilité de la distance de chaque ligne de direction à ce point commun, lequel peut prendre une position qui lui donne des propriétés remarquables, lorsqu'il appartient à un système sollicité par des forces qui, dans leurs changements de directions, demeurent constamment parallèles entr'elles et dont chacune conserve le signe de son moment. Le centre dont il s'agit est, alors, art. 228, un point quelconque de la ligne qui a pour équation

$$(y - x \text{ tang. } \alpha)\, \Sigma(P) - \Sigma(Py) + \Sigma(Px) \text{ tang. } \alpha = 0$$

si on fait, dans cette équation $x = \dfrac{\Sigma(Px)}{\Sigma(P)}$, on aura $y = \dfrac{\Sigma(Py)}{\Sigma(P)}$, et on déterminera le point de la trace de la résultante, déja trouvé et défini art. 223 et 224, dont la position est indépendante de l'angle α formé par chaque force et par une ligne de position fixe. Ce point réunira donc, à la propriété énoncée dans l'article précédent, celle d'être aussi placé à la commune intersection de toutes les lignes de direction de la résultante (dont la valeur demeure constante) dans l'hyposhèse où, conservant le parallélisme des forces et les positions des points auxquels ces forces sont appliquées, on ferait décrire, à la ligne de direction de chacune d'elles, des angles quelconques autour de son point d'application.*

J'ai dit que ce point se nommait le *centre des forces parallèles ;* nous le retrouverons bientot encore dans les systêmes de points d'applications des forces, à trois dimensions.

236. Le *centre des forces parallèles* étant supposé fixe, leur équilibre autour de ce centre n'est soumis, comme on la vu, à d'autres condition qu'à celle de la conservation de leurs intensités et des positions de leurs points d'application ; cependant, le systême étant de forme invariable, on peut lui faire décrire un angle quelconque, autour du centre fixe, et, après avoir ainsi changé sa position, l'équilibre subsistera toujours si chacun de ses points est encore sollicité par la même force et si le parallélisme des forces est maintenu.

Cette théorie aura, dans toute la suite du cours, des applications importantes.

Cas *singulier* de la composition des forces qui agissent dans un même plan. Définition des *couples*.

237. Une des conséquences de la théorie que j'ai exposée depuis l'art. 120 jusqu'à l'art. 140, et depuis l'art. 215 jusqu'à l'art. 226 est, qu'en général, des forces qui agissent dans un même plan, peuvent toujours se composer en une force unique. La proposition est vraie, sans exception, si on admet, comme valeurs qui résolvent un problême, toutes celles que peut donner l'analyse, depuis zéro jusqu'à l'infini, mais il n'en faut pas moins, lorsque la nature de la question le permet, substituer, à ces valeurs *limites*, des quantités susceptibles d'entrer dans des expressions analytiques calculables.

Ces considérations me déterminent à compléter, d'après la promesse que j'en ai faite, art. 140, la théorie exposée depuis l'art. 120, en parlant d'un cas *singulier* de composition des forces, qui donne une résultante nulle, ou infiniment petite, agissant à une distance infinie du point auquel on rapporte les moments.

238. Ce cas a lieu lorsque des forces, en nombre pair, appliquées à un systême, peuvent être divisées en *couples*, c'est-à-dire en groupes composés chacun de deux forces, ces deux forces, qui constituent chaque groupe ou *couple*, étant parallèles, égales, et agissant en sens contraires, dans des lignes de direction placées à une distance finie l'une de l'autre.

239.

239. Il est évident que les composantes de ces forces, parallèles, deux à deux, à des lignes quelconques prises dans l'espace, formeront une somme nulle; et si on suppose qu'elles agissent, toutes, dans un même plan, on aura, en employant la notation de l'art. 141, $X=0$ et $Y=0$, équations qui expriment que les forces peuvent se réduire à deux forces parallèles, égales, faisant, avec une même droite, des angles dont les cosinus ont des signes différents, et satisfont à une partie des conditions de l'équilibre d'un système libre; mais cet équilibre exige, de plus, que les mêmes forces soient *directement opposées*, c'est-à-dire aient leurs directions sur une même ligne, et il faut, pour que cette condition soit remplie, qu'on ait une troisième équation $\Sigma(Pp)=0$, à réunir aux deux précédentes. C'est l'observation, consignée dans les art. 142 et 143, à la suite de l'exposition détaillée de la théorie dont cette observation est une conséquence; or, dans le cas *singulier* dont il s'agit, x' étant une des forces qui composent une couple, τ' et τ'' les perpendiculaires abaissées, du point auquel on rapporte les moments, sur leurs directions respectives, la somme des moments des forces x' sera $x'\tau''-x'\tau'$ ou $x'(\tau''-\tau')$, c'est-à-dire le produit d'une des forces par la distance entre leurs directions; désignant cette distance par ε', le moment de la couple sera $x'\varepsilon'$, et la somme des moments de toutes les couples, ou de toutes les forces du système, aura pour expression $\Sigma(x\varepsilon)$; les explications que j'ai données, dans plusieurs des articles précédents, sur les signes des moments en général, me dispensent d'entrer dans aucun détail sur les signes des termes de la forme $x\varepsilon$.

240. $\Sigma(x\varepsilon)$ ne doit être nulle que dans des cas particuliers, c'est-à-dire, qu'en général, elle est une quantité finie; l'équilibre n'existe donc pas, quoique les sommes des composantes, parallèles aux axes, soient nulles, et substituant, dans les équations (A) de l'art. 139, pour X, Y, et $\Sigma(Pp)$ les valeurs que comporte l'état actuel de la question, on a $R=0$, $r=\dfrac{\Sigma(x\varepsilon)}{R}=\infty$ conformément à ce qui a été annoncé article 237.

241. Il est donc impossible d'obtenir la composition effective, en une seule résultante, des couples appliquées à un système *libre*, et par conséquent de leur faire équilibre avec une seule force; mais cette impossibilité qui tient à la condition qu'on s'impose de remplacer, ou

d'équilibrer les forces du système libre avec une force unique, cesse aussitot qu'on ne s'astreint plus à cette condition. En effet soient R' et R'' deux forces qu'on veut substituer à celles qui sollicitent le système, a' et a'' les angles qu'elles font avec l'axe des x, r' et r'' les distances de leurs directions à l'origine des x et des y, ces forces, d'après la théorie dont le contenu de l'art. 139 est la conséquence, résoudront le problême lorsqu'elles satisferont aux équations

$$R' \cos. a' + R'' \cos. a'' = X$$
$$R' \sin. a' + R'' \sin. a'' = Y$$
$$R' r' + R'' r'' = \Sigma(Pp)$$

trois des inconnues R', R'', a', a'', r', r'' demeureront arbitraires, et pourront être déterminées de manière à satisfaire à des conditions particulières. Si donc on pose pour condition que les forces sont dans le cas de l'art. 238, ce qui donne $X = o$, $Y = o$, $\Sigma(Pp) = \Sigma(\varkappa\varepsilon)$, on aura, égard à cette circonstance en faisant $R' = -R''$; $a' = a''$ et les équations qui résolvent le problême, deviendront $(R' - R') \cos. a = o$; $(R' - R') \sin. a' = o$; $R'(r' - r'') = \Sigma(\varkappa\varepsilon)$

242. D'après ces résultats on pourra remplacer toutes les couples par une couple unique, telle que le produit d'une des forces qui la composent par la distance entre les directions de ces forces soit égale à la somme de tous les produits pareils donnés par les autres couples. Désignant par Γ l'une des forces de la couple résultante, et par ε la distance entre leurs directions, on a, pour déterminer l'une des quantités Γ et ε, l'autre étant arbitraire, l'équation

$$\Gamma\varepsilon = \Sigma(\varkappa\varepsilon)$$

243. Si on donne aux forces Γ, ou à leurs moments, des signes contraires à ceux que comportent les équations précédentes, ces forces feront équilibre à toutes les forces $\varkappa$; et en général des couples, en nombre quelconque, seront en équilibre, sur un système libre, lorsqu'on aura l'équation $\Sigma(\varkappa\varepsilon) = o$, et réciproquement; les autres équations $X = o$, $Y = o$, se trouvant satisfaites, *a priori*, par les conditions mêmes qui établissent les relations entre les forces.

244. L'équation de composition $\Gamma\varepsilon = \Sigma(\varkappa\varepsilon)$ et l'équation d'équilibre $\Sigma(\varkappa\varepsilon) = o$, fournissent un résultat remarquable; les coordonnées des points d'applications des forces et les distances de leurs directions au point auquel on rapporte les moments, n'entrant point dans ces équa-

tions, dès que l'une ou l'autre a lieu, pour une combinaison particulière des positions des couples, dans le plan qui les renferme, elle a encore lieu pour toute autre combinaison arbitraire qu'on peut faire de ces positions, dans le même plan, non seulement en transportant les couples d'un lieu de ce plan dans un autre, mais, encore, en donnant, aux forces parallèles qui les composent, des directions quelconques. Tant que les forces d'une couple, la distance entre leurs directions, et le signe du produit d'une des forces, par cette distance, ne changeront pas, le terme introduit dans une expression analytique, par cette couple, aura toujours même valeur et même signe.

245. Il est presque inutile d'ajouter que cette même faculté de placer les couples, et de diriger leurs forces à volonté, subsiste encore dans l'hypothèse où ces couples se trouvent combinées avec des forces non accouplées; et enfin on peut, sans que l'effet général des forces et les expressions analytiques, qui se rapportent à cet effet, subissent la moindre altération, substituer, à une couple quelconque, une autre couple, pourvu que les produits respectifs des forces de ces deux couples par les distances entre leurs directions, aient même valeur et même signe.

246. Voici encore une autre propriété dont j'aurai occasion de faire usage. Si plusieurs couples, renfermées dans un plan, sont en équilibre sur ce plan, les conditions de cet équilibre seront, art. 243, exprimées par l'équation unique $\Sigma(x\varepsilon)=0$; mais il est remarquable que cette équation de condition est commune au cas où le plan des forces a un point fixe, et à celui où il n'en a pas, elle exprime, complétement, les conditions de l'équilibre dans l'un et l'autre cas. Un point fixe sur un plan qui renferme des couples en équilibre autour de ce point, n'éprouve donc aucune pression, et peut être supprimé sans que l'équilibre cesse d'avoir lieu. Cette propriété tient à ce que, par la nature des couples, on a toujours la résultante générale $R=0$, et on a vu, art. 147 et 230, que la pression d'un point fixe, situé dans un plan, et autour duquel des forces, situées dans le même plan, se trouvent en équilibre, est, dans tous les cas, égale à R.

On peut présenter la démonstration de ce théorême, sous cette autre forme bien facile à saisir. Substituons, aux couples en équilibre, d'autres couples de même valeur et de même signe, dans chacune desquelles la distance ε entre les deux forces de la couple soit la même, et

plaçons les de manière que toutes les forces qui les composent soient dirigées sur deux droites parallèles, tracées à la distance ε l'une de l'autre ; (ces diverses dispositions pouvant, d'après les deux articles précédents, se faire sans que l'effet des couples soit changé) l'équation $\Sigma(x\varepsilon)=0$, qui est devenue $\varepsilon\,\Sigma(x)=0$, nous apprend que la somme des forces x est nulle sur chacune des deux parallèles, et que par conséquent les couples en équilibre se réduisent ultérieurement à quatre forces égales, deux desquelles agissent dans des sens directement opposés aux sens d'action des deux autres ; un équilibre de cet espèce, résulte donc de la destruction complète des forces, et ne suppose jamais que leurs efforts doivent se reporter sur aucun point fixe.

247. Je finirai ce que j'ai a dire sur les couples agissant dans un même plan, en faisant observer que la combinaison de plusieurs couples avec d'autres forces, susceptibles d'êtres composées en une seule, peut toujours donner, ultérieurement, une résultante unique ; en effet, on a d'après les deux articles précédents, la liberté de mettre toutes les directions des forces des couples à angle droit sur la direction de la résultante des autres forces ; dans cet état, la résultante dont je viens de parler pourra se composer avec une des forces parallèles, la force donnée par cette composition, se composera à son tour avec une des autres forces parallèles et ainsi de suite, jusqu'à la dernière parallèle, et, il est évident, toutes les forces étant supposées avoir des valeurs finies, que chaque composition successive aura lieu entre deux forces dont les directions se rencontreront.

Équilibre et composition des forces parallèles qui agissent dans des plans différents ; du *centre des forces parallèles* dans ce cas.

248. L'analyse des questions relatives à l'équilibre et à la composition des forces, qui agissent dans des plans différents, va être traitée par la même méthode que j'ai déjà employée lorsqu'il s'agissait des forces concourantes en un point commun ou dirigées dans un même plan. Je supposerai, d'abord, que trois forces agissent sur autant de points d'un système libre de forme invariable, et je chercherai les conditions de leur équilibre, sans prononcer autre chose, sur les directions de ces forces, sinon qu'elles sont parallèles.

249. Il résulte de ce qui a été démontré, art. 215 et 216, que trois

forces parallèles, en équilibre doivent nécessairement être dirigées dans un même plan (celui qui comprend leurs points d'applications), il faut donc, puisque cette condition n'est plus comprise dans l'énoncé de la question, qu'elle soit exprimée par l'analyse. Rapportant les positions des différents points des directions des forces aux axes des x, y et z, les trois directions rencontreront, nécessairement, un des plans coordonnés; soit le plan rencontré celui des xy. Je nomme P', P'', P''', les trois forces; a', a'', a'''; b', b'', b''', les coordonnées des points de rencontre de leurs directions et du plan xy, respectivement parallèles aux x et aux y; l'équation qui exprimera que les points auxquels se rapportent les coordonnées sont en ligne droite, exprimera, en même temps, que les directions des forces (dont le parallélisme est présupposé par l'énoncé de la question) sont dans un même plan. Cette première condition est donc assurée par l'équation

$$\frac{b''-b'}{a''-a'}=\frac{b'''-b'}{a'''-a'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

Il reste à exprimer que les forces sont en équilibre dans leur plan commun et, par conséquent, art. 225, à poser les équations

$$P' \quad +P'' \quad +P''' \quad = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (B)$$
$$P'p'+P''p''+P'''p''' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (C)$$

p', p'' et p''' étant les perpendiculaires menées sur leurs directions d'un point commun pris sur le plan des forces. La position de ce point étant arbitraire art. 226, je la prends, pour simplifier le calcul, sur la direction de P', ce choix, de pure commodité, ne nuisant, en rien, à la généralité des résultats, et la deuxième équation, ci-dessus, devient

$$P''p''+P'''p''' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (C)\ (*)$$

(*) Ajoutons à l'équation (C') le produit $\pi'(P'+P''+P''')$ qui, d'après l'équation (B), est zéro par lui même; cette équation (C') deviendra, en faisant $p''+\pi'=\pi''$, $p'''+\pi'=\pi'''$; $P'\pi'+P''\pi''+P'''\pi'''=0$; les longueurs π', π'', π''' ayant une origine commune, quelconque, sur une perpendiculaire aux directions des forces. On voit aisément et immédiatement, par ce calcul, comment (C') reproduit (C) et a le même degré de généralité que cette équation (C).

J'observe ensuite qu'il résulte de l'équation (A), et de la condition du parallélisme des forces, que p'' est à p''' comme la distance entre les points dont les coordonnées sont a', b', a'', b'' est à la distance entre les points dont les coordonnées sont a', b', a''', b'''. Mais, d'après la même équation (A), ces deux dernières distances sont entr'elles dans le rapport de $a''-a'$ à $a'''-a'$, et dans le rapport de $b''-b'$ à $b'''-b'$; on aura donc introduit dans l'équation (C') les conditions énoncées par (A), si on y substitue, successivement, à p'' et p''', les lignes $a''-a'$, $a'''-a'$; $b''-b'$, $b'''-b'$ qui leur sont proportionnelles, et on obtiendra, ainsi, les deux équations suivantes, qui représentent le système de (A) et (C') et qui redonnent immédiatement (A), par l'élimination de P'' et P''',

$$P''(a''-a')+P'''(a'''-a')=0;$$
$$P''(b''-b')+P'''(b'''-b')=0.$$

j'ajoute à la première de ces équations le produit a' $(P'+P''+P''')$ et à la deuxième le produit b' $(P'+P''+P''')$, produits qui, d'après l'équation (B), sont, l'un et l'autre, zéros par eux-mêmes; et j'ai, finalement, pour remplacer (A) et (C'), ou (A) et (C), les deux équations suivantes,

$$P'a'+P''a''+P'''a'''=0;$$
$$P'b'+P''b''+P'''b'''=0.$$

250. Ainsi, pour énoncer, complètement, que trois forces parallèles sont dans le même plan et qu'elles sont en équilibre, il faut poser les équations suivantes,

$$P'+P''+P'''=0;$$
$$Pa'+P''a''+P'''a'''=0;$$
$$Pb'+P''b''+P'''b'''=0.$$

251. On déduit immédiatement, de ces équations, les formules pour la composition de deux forces parallèles P' et P'', appliquées à deux points quelconques de l'espace. R étant la résultante de ces forces, (qui, art. 215, 216 et 218, doit avoir sa direction dans un même plan avec celles de P' et P'', et leur être parallèle), a et b les coordonnées des points

de rencontre de sa direction et du plan de xy, les quantités R, Ra et Rb doivent être telles qu'en changeant leurs signes elles fassent, respectivement, avec $P'+P''$, $P'a'+P''a''$, $P'b'+P''b''$, des sommes nulles, il faut donc qu'on ait

$$R = P' + P''$$
$$Ra = P'a' + P''a''$$
$$Rb = P'b' + P''b''$$

252. Si on avait à composer trois forces parallèles P', P'', P'''; dont les directions pourraient être, ou n'être pas dans un même plan, les lettres a, b, accentuées différemment, représentant toujours les mêmes quantités que dans les deux articles précédents, on commencerait par composer P' et P'', d'après les formules que je viens de donner, et composant ensuite, avec P''', la résultante de ces forces que je désigne par R, on aurait

$$R = P' + P'' + P'''$$
$$Ra = P'a' + P''a'' + P'''a'''$$
$$Rb = P'b' + P''b'' + P'''b'''$$

253. Cette méthode de compositions binaires successives appliquée à un nombre quelconque de forces P', P'' etc., dont les lignes de directions sont supposées être dans différents plans, fait voir, d'abord, que la résultante générale est parallèle aux composantes, et donne, pour calculer la valeur de cette résultante et déterminer le point où sa direction rencontre le plan xy, les équations

$$R = \Sigma(P)$$
$$Ra = \Sigma(Pa)$$
$$Rb = \Sigma(Pp)$$

a et b sous le signe Σ, représentant les ordonnées particulières a', a'' etc. b', b'' etc.

254. Dans l'hypothèse de l'équilibre entre les forces P', P'' etc. on a les équations

$$\Sigma(P) = 0\ ;\ \Sigma\, Pa) = 0\ ;\ \Sigma(Pb) = 0$$

qui énoncent que l'une quelconque P, d'entre ces forces, devient la résultante de toutes les autres, si on change, sur sa ligne de direction, le sens de son action, et, par conséquent, les signes des termes Pa et

$P b$ qui appartiennent à cette force ; ou qui, en d'autres termes, énoncent que ces forces peuvent se réduire à deux forces égales et directement opposées.

255. Les équations des deux articles précédents ne renferment que les valeurs des forces et les coordonnées des points où leurs directions rencontrent le plan $x y$; ces équations sont donc indépendantes des angles formés par la direction commune des forces et par les axes coordonnés, et applicables à des valeurs quelconques de ces angles, ou à une direction commune, arbitraire, des forces dans l'espace. On pourra en déduire aisément d'autres équations dans lesquelles se trouveront les angles formés par les forces et par les axes coordonnés, et les coordonnées des points d'applications des forces pris sur leurs directions hors du plan $x y$.

Fig. 11 Soit YAX le plan xy, C le point de ce plan, où il est rencontré par la direction de la force P et qui a pour coordonnées $AB = a$ et $Bc = b$; soient de plus, M et CMV les projections orthogonales respectives, sur le plan xy, du point d'application de P et de la direction de cette force ; nous aurons les deux coordonnées $AP = x$ et $PM = y$. Supposons que le triangle rectangle formé par CM, par la portion de la ligne de direction de P comprise entre C et le point d'application de cette force, et par la troisième coordonnée z, dont le pied est en M, soit couché sur le plan xy, après avoir tourné, d'un quart de circonférence autour de CM, et que ce triangle soit CMN ; on aura $MN = z$, et on fera, en conservant la notation adoptée jusqu'à présent, angle $CNM = \gamma$, angle formé par CN et par la parallèle BCq aux y, $= 6$; angle formé par CN et par la parallèle CQ à l'axe des x, $= \alpha$, (les angles α et 6 se rapportant à la position que prend CN, lorsque le plan du triangle rectangle CNM est perpendiculaire au plan xy).

Cette construction donne

$$CN = \frac{z}{\cos. \gamma}$$

$$CQ = CN \times \cos. \alpha = \frac{z \cos. \alpha}{\cos. \gamma} \; ; \; Cq = CN \times \cos. 6 = \frac{z \cos. 6}{\cos. \gamma}$$

d'où, en observant que $CQ = x - a$ et que $Cq = y - b$,

$$a = x - \frac{z \cos. \alpha}{\cos. \gamma} \; ; \; b = y - \frac{z \cos. 6}{\cos. \gamma}.$$

J'ai

J'ai voulu donner une démonstration directe et immédiate de ces formules, vu l'importance de l'usage que je vais en faire, mais j'aurais pu les déduire bien simplement des équations de l'art. 27, en observant que, pour appliquer ces équations au cas dont il s'agit ici, il faut y introduire la condition que le plan des $x'y'$ se confond avec le plan des xy, ce qui donne $c=0$. Faisant donc $c=0$, dans les deux dernières équations de l'art. cité, on a, pour a et b, les valeurs trouvées ci-dessus.

256. Ces valeurs applicables aux a et b accentués différemment, étant substituées dans les équations de l'art. 253, on a

$$R=\Sigma(P)$$

$$z=\frac{y\cos.\gamma}{\cos.\delta}+\frac{\Sigma(Pz)-\frac{\cos.\gamma}{\cos.\delta}.\Sigma(Py)}{\Sigma(P)}$$

$$z=\frac{x\cos.\gamma}{\cos.\alpha}+\frac{\Sigma(Pz)-\frac{\cos.\gamma}{\cos.\alpha}.\Sigma(Px)}{\Sigma(P)}$$

et en égalant ces deux valeurs de z

$$y=x\frac{\cos.\delta}{\cos.\alpha}+\frac{\Sigma(Py)-\frac{\cos.\delta}{\cos.\alpha}\Sigma(Px)}{\Sigma(P)}$$

équations qui donnent la valeur de la résultante et sa direction absolue. Il faut se rappeller que α, δ et γ sont des angles communs aux directions de toutes forces, que les coordonnées x, y, z, sous le signe Σ, représentent les valeurs particuliéres des x', y', z', ; x'', y'', z'' etc. des points d'applications des forces P', P'' etc. et enfin que l'une quelconque des trois équations de la direction de la résultante est une conséquence des deux autres.

257. Les mêmes valeurs des quantités a et b de différents accents, substituées dans les équations d'équilibre de l'art. 254, les changent en

$$\Sigma(P)=0$$

$$\Sigma(Pz)-\frac{\cos.\gamma}{\cos.\delta}\Sigma(Py)=0$$

$$\Sigma(Pz)-\frac{\cos.\gamma}{\cos.\alpha}\Sigma(Px)=0$$

et on peut, à l'une quelconque de ces deux dernières, substituer la suivante qui en est une conséquence

$$\Sigma\,(Py) - \frac{\cos.\,6}{\cos.\,\alpha}\,\Sigma\,(Px) = 0$$

258. La position absolue, dans l'espace, de la ligne de direction de la résultante dépend, en général, des angles communs que font les forces avec les trois axes coordonnés des points d'applications, et des intensités de ces forces; on peut, en maintenant les points d'applications et les intensités, faire varier l'inclinaison générale, tant des composantes que de la résultante, mais celle-ci conservera un point commun à toutes les directions qu'elle pourra prendre; ce point est le *centre des forces parallèles* que j'ai déjà déterminé art. 224 et 235 pour les forces parallèles qui agissent dans le même plan.

Comme j'en suis à la détermination de ce centre dans le cas le plus général de l'action des forces parallèles, il est bon de ne pas présupposer son existence, et de résoudre le problème de manière que l'analyse seule fournisse, en même temps, et la preuve de cette existence et les valeurs des coordonnées du point cherché, pour cela, j'introduis, dans les équations de l'art. 256, la condition que la position du point, qui a x, y et z pour coordonnées, est indépendante de α, 6 et γ; d'après cette condition, je dois égaler, séparément, à zéro, dans chacune de ces équations, les sommes des termes multipliés par des fonctions de ces angles, je déduis, en conséquence, des deux premières les équations de condition,

$$\frac{\cos.\gamma}{\cos.\,6}\cdot y - \frac{\cos.\gamma}{\cos.\,6}\cdot\frac{\Sigma\,(Py)}{\Sigma\,(P)} = 0;\quad \frac{\cos.\gamma}{\cos.\,\alpha}\cdot x - \frac{\cos.\gamma}{\cos.\,\alpha}\cdot\frac{\Sigma\,(Px)}{\Sigma\,(P)} = 0;$$

dont les angles α, 6 et γ s'éliminent d'eux mêmes; et j'obtiens les valeurs, dégagées de ces angles, $y = \dfrac{\Sigma\,(Py)}{\Sigma\,(P)}$, $x = \dfrac{\Sigma\,(Px)}{\Sigma\,(P)}$; la 3me équation fournirait la même valeur de x qui, substituée dans la 2me, donne $z = \dfrac{\Sigma\,(Pz)}{\Sigma\,(P)}$. ainsi voila la preuve de l'existence et la position d'un point dont l'immobilité, dans le système, reste assujettie aux seules conditions du parallélisme des forces et de l'invariabilité de $\Sigma\,(Px)$, $\Sigma\,(Py)$, $\Sigma\,(Pz)$, $\Sigma\,(P)$; ce point est la commune intersection de

toutes les lignes suivant lesquelles la résultante peut être dirigée, lorsque les composantes et leurs points d'application ne changent pas.

259. Le système de points matériels auquel les forces sont appliquées, peut, cependant, prendre, lui même, différentes positions dans l'espace; mais si les mêmes points, sont constamment, sollicités par les mêmes forces, (la condition du parallélisme subsistant toujours) le *centre des forces parallèles*, conservera sa position dans le systême auquel on peut supposer que les axes des coordonnés sont liés, ces axes ne devant, dans les questions dont je m'occupe ici, se rapporter à aucun point pris hors du système.

260. Une conséquence évidente de ce qui précède est que, dans l'hypothèse de l'immobilité absolue du *centre des forces parallèles*, et de l'invariabilité des intensités des forces appliquées aux différents points du système, l'équilibre autour du point fixe sera maintenu, quelque soient la direction générale qu'on donne aux forces, et la position que prend le système autour de ce point, qui sera, dans tous les cas rencontré par la ligne de direction de la résultante.

Quelques notions sur la figure et la grandeur de la terre, sur la pesanteur et ses variations, pour servir de préparation à la théorie des *centres de gravité*.

261. On a vu, art. 16 et suivants, comment la mesure d'une force quelconque se ramenait à la *pondération*, c'est-à-dire à l'évaluation du rapport qui existe entre cette force et la *pression* qu'un corps pesant est capable d'exercer. La *pesanteur* est ainsi le terme de comparaison de toutes les autres forces; les élèves savent que cette puissance de la nature, qui tend continuellement à ramener, vers la surface de la terre, les corps élevés au-dessus de cette surface, est la même puissance en vertu de laquelle les corps célestes agissent les uns sur les autres, actions et réactions réciproques, qui ont généralement lieu entre deux ou plusieurs corps situés arbitrairement dans l'espace.

Je parlerai, dans la seconde partie du cours, des lois auxquelles l'action de la pesanteur est soumise, des phénomènes de mouvement qui en résultent, et je me bornerai, dans ce moment, à rapporter quelques résultats d'observations et de calcul nécessaires pour l'intelligence et l'application de la théorie des *centres de gravité*.

262. La direction de la pesanteur à un point donné de la surface de la terre, où on peut supposer qu'il existe une nappe d'eau stagnante, ou une mer, est toujours perpendiculaire au plan tangent à cette nappe d'eau, mené par le point donné; ce plan est celui de l'*horison*, la ligne de direction de la pesanteur est la *verticale*, le tout rapporté au même, point; et la surface des eaux de la mer est celle d'un sphéroïde elliptique de révolution, engendré par le mouvement d'un demi-méridien autour du petit axe de ce méridien qui passe par les pôles, le grand axe étant le diamètre de l'équateur.

263. Voici des formules qui donnent, avec toute l'exactitude nécessaire, les rapports entre les valeurs angulaires et les longueurs métriques des plus courtes distances, mesurées sur la surface du sphéroïde terrestre, entre deux points de cette surface, lorsque les distances n'excèdent pas 200000 mètres.

Si on fait passer un plan par une verticale ayant son pied à la surface de la mer, et qu'on prenne, sur la section de cette surface par le plan, un arc dont la valeur angulaire soit d'un *grade* ($\frac{1}{100}$ du quart de cercle) divisé en deux parties égales par le point de rencontre de la verticale et de la surface de la mer, la longueur de cet arc en mètres, sera

$$(A) \ldots 100000^{\text{mètres}} + \{1 - 2\cos.2\phi + (1 + \text{c}.2\phi)\,\text{c}.2\chi\}\,150^{\text{mètres}}$$

ϕ étant la latitude du milieu de l'arc et χ le complément de l'angle formé par le plan coupant et par le méridien, et on aura, pour calculer la longueur du rayon de cet arc, l'expression

$$(B) \ldots\ldots a\,\{1 - \frac{\alpha}{2}[2\cos.2\phi - (1 + \cos.2\phi)\cos.2\chi]\}\ (*)$$

a étant le rayon de l'équateur dont le logarithme vulgaire $= 6{,}80453050 8$ et α l'*excentricité*, ou le rapport entre l'excès du demi grand axe sur le demi petit axe du méridien elliptique, et le demi grand axe, rapport qui est celui de $1 : 334$.

264. Lorsque le plan coupant, qui renferme une normale à la surface, du sphéroïde terrestre, se confond avec le plan du méridien, les normales à la section sont, en même temps, normales à la surface du sphé-

(*) Les formules (A) et (B) sont tirées d'un mémoire sur quelques problèmes de trigonométrie *sphéroïdique*, que j'ai publié dans le volume de la *connaissance des temps* de 1808.

roïde, ce qui n'a pas lieu pour les sections obliques; mais les normales de ces dernières sections qui ne sont qu'à un demi-grade, ou un grade de distance angulaire de la normale à la surface, par laquelle passe le plan coupant, peuvent être, elles mêmes, regardées, sans erreurs sensibles, comme des normales à la surface; on voit donc que deux points dont la plus courte distance, mesurée sur le sphéroïde terrestre, ne répond qu'à une valeur angulaire d'un grade, sont éloignés, l'un de l'autre de 100000 mètres, plus ou moins une petite quantité, qui dépend de la latitude et de l'angle que fait cette plus courte distance avec le méridien passant par son point milieu; il suit de là que les directions de la pesanteur, dans un espace de 100 ou 200 mètres d'étendue, approchent tellement du parallélisme, que dans les cas d'applications, ordinaires, de la statique, on n'a aucun besoin d'avoir égard à leurs inclinaisons mutuelles. Les plus grand corps dont il soit indispensable, dans la pratique des constructions, de connoître très-exactement le *centre de gravité*, sont les vaisseaux; or un vaisseau, de 118 canons, n'a que 63 mètres de longueur totale; l'angle formé par la verticale du point milieu de cette longueur, et par chacune des verticales extrêmes, est, à très-peu-près, de $0^{grade},0003$, environ $1''$ d'ancienne mesure angulaire, et le produit d'une force, par le cosinus d'un pareil angle, donne une composante qui ne diffère de la force décomposée que de 0,00000000001 de cette force; ce serait environ un déci-gramme sur 10 millions de kilogrammes qui se réduit à un demi-déci-gramme pour le poid d'un vaisseau de 118 canons, qui est d'environ cinq millions de kilogrammes, lorsque son armement et son chargement sont complets.

265. On peut ainsi considérer les forces dues à la pesanteur imprimée aux points matériels d'un corps grave, comme des forces parallèles; il reste à parler des intensités de ces forces, dans les corps ou molécules de corps de masses ou de densités diverses, et dans les différents lieux.

On a reconnu, relativement aux masses et aux densités, que, généralement, les forces dues à la pesanteur étaient proportionnelles aux masses des corps qu'elles animaient, d'où il suit que, dans les corps homogènes, elles sont, sous un volume constant, proportionnelles aux densités.

On sait, de plus, que si la terre était homogène, sphérique, sans mouvement de rotation diurne, et que les parties de sa masse ne fussent

soumises qu'à leurs actions réciproques, la pesanteur serait constante à tous les points d'une enveloppe sphérique, concentrique à la surface de la terre, et ne varierait que dans le sens vertical. L'observation et le calcul ont prouvé, que les phénomènes n'étaient pas conformes au premier de ces deux résultats et que la pesanteur variait, non-seulement d'un point à l'autre d'une verticale, mais encore d'un point à l'autre d'un même méridien; les formules suivantes comprennent les deux variations, et donnent l'intensité de la pesanteur à un point quelconque de l'espace, pris à une distance au-dessus du niveau de la mer, qui peut aller jusqu'à 8 ou 10 mille mètres.

Je prends l'intensité de la pesenteur, sous l'équateur, pour unité ou terme de comparaison, je désigne par ϕ la latitude du lieu ou le corps pesant se trouve placé, par z son élévation au-dessus du niveau de la mer, et par r le rayon moyen de la terre; ce rayon dont la longueur est de 6366198 (log.=6,80388012) est le rayon de courbure du méridien, à la latitude moyenne, ou à 50 grades de l'équateur et du pôle; le grade décrit de ce rayon a, de longueur, 100000 mètres ou la 100e partie d'un quart du méridien, ainsi la circonférence décrite de ce rayon est égale à la longueur d'un méridien.

Ces valeurs posées, le rapport entre la pesanteur, à un point de l'espace qui n'est pas à plus de 10000 mètres au-dessus du niveau de la mer et la pesanteur, au niveau de la mer, sous l'équateur, se calcule par la formule

$$\left(1-\frac{2z}{r}\right)(1+0{,}005557 \sin.^2 \phi)$$

266. On a $\sin.^2 \phi = \frac{1}{2}(1-\cos. 2\phi)$ valeur qui, substituée dans la précédente, la change en

$$\left(1-\frac{2z}{r}\right)(1{,}002779-0{,}002779 \cos. 2\phi)$$

la pesanteur, sous l'équateur, étant toujours prise pour unité.

267. En prenant, pour unité, la pesanteur sous le parallèle moyen, celui dont la latitude est d'un demi angle droit, ou de 50 grades, la formule devient

$$\left(1-\frac{2z}{r}\right)(1-0{,}002771 \cos. 2\phi)$$

268. On voit, par les formules précédentes, qui seront utiles dans la suite du cours, et sur lesquelles j'entrerai dans quelques détails lorsque j'aurai à en faire des applications, que la pesanteur augmente de l'équateur au pôle et que ses accroissements sont proportionnels aux quarrés des sinus de latitude; sa valeur sous l'équateur étant 10000

ses valeurs sont { à la latitude moyenne 10028
et au pôle 10056

ainsi le même corps pesant qui, sous l'équateur, ferait équilibre à une force indépendante de la pesanteur, qui mettrait, par exemple, un ressort dans un certain état de compression, transporté à la latitude moyenne, et au pôle, deviendrait capable de contre-balancer cette force augmentée, respectivement, de un et de deux 360es de sa valeur primitive.

D'une autre part si on veut avoir la diminution de pesanteur depuis le niveau de la mer jusqu'à une hauteur égale à celle du chimborazo, et qui est de 6544 mètres, d'après les mesures de Mr. de Humbold, on trouve en calculant le terme $\frac{2z,}{r}$ que la diminution cherchée est de 0,002 ou un 500e.

269. Ces résultats d'observation et de calcul prouvent que, si on veut considérer l'unité de poids, dont j'ai parlé art. 18, comme le terme général de comparaison des forces de toute espèce, on doit, à la rigueur, la rapporter, constamment, à une certaine latitude et à une certaine hauteur au-dessus du niveau de la mer; mais cette rigueur n'est pas necessaire, dans les applications usuelles, vu la petitesse des anomalies qui résultent des variations de la pesanteur; elle est même inutile lorsque les poids ne sont employés qu'à comparer des masses, car, par exemple, une masse de platine, d'un *kilogramme*, étalonnée à Paris, fera équilibre, dans tous les lieux, à la même masse de mercure, à la même masse de cuivre etc. les changements d'intensité de la pesanteur affectant également ces différents corps, lorsqu'on les transporte tous ensemble d'un lieu dans l'autre.

270. Nous pouvons donc, dans les opérations qui reviennent le plus fréquemment, en considérant les forces dues à la pesanteur comme parallèles sur un espace très-petit par rapport à la grandeur de la terre, négliger leurs variations en latitude et en hauteur; j'ajouterai que les

circonstances, où on est obligé, dans les calcules géodésiques, d'avoir égard à la figure élliptique de la terre, sont rares, et que, le plus souvent, on peut faire ces calculs, en regardant la terre comme une sphère de 6366198 mètres de rayon.

Malgré ces simplifications, j'ai cru devoir présenter aux élèves des données exactes sur la figure de la terre et les variations de la pesanteur; il est toujours important d'avoir, sur des objets de cette nature, des notions plus complettes que celles dont on aurait, strictement, besoin pour les applications usuelles, et si la pratique peut, dans quelques occasions, supprimer une partie des éléments de la théorie, il n'en faut pas moins savoir pourquoi ces suppressions sont permises, et être en état d'assigner les limites des erreurs qu'elles font commettre.

Définition du *centre de gravité* d'un corps, du centre de *masse* ou d'*inertie*, du centre de *figure*. Formules générales pour la détermination de ces centres.

271. Un corps soumis à l'action de la pesanteur, et qui n'est sollicité par aucune autre force, se trouve dans l'état des systèmes dont il a été parlé art. 253 et suivants, en observant que, dans le cas dont il s'agit ici, le nombre des points matériels, sur lesquels les forces parallèles agissent, est infini, et que de plus, ces points forment une ou plusieurs masses continues.

Le *centre des forces parallèles* prend, lorsque ces forces sont celles de la pesanteur, le nom de *centre de gravité;* les mêmes formules servent à la détermination de l'un et l'autre centre; mais le système pesant étant, ou un corps *continu*, ou un assemblage de corps *continus*, le signe Σ indique, dans ce cas, ou une intégrale définie, prise dans l'étendue d'un corps, ou la somme de plusieurs intégrales définies, prises dans les étendues respectives de plusieurs corps formant le système dont on veut avoir le centre de gravité; chaque élément de masse, quand on calcule pour trois dimensions, répond à quatre quantités élémentaires ou différentielles, qui représentent les quantités P, Px, Py, Pz des formules de l'art. 258.

272. D'après l'identité du centre des forces parallèles et du centre de gravité, si on rend fixe le centre de gravité d'un corps, ou système de corps, de forme invariable, les actions de la pesanteur seront art. 260 constamment

tamment en équilibre, autour du centre fixe, quelque position qu'on donne d'ailleurs, au corps ou au système de corps. Cette propriété a été souvent employée pour définir le centre de gravité.

273. Les coordonnées x, y, z qui art. 258 donnent la position du centre des forces parallèles, et que je désignerai, respectivement, par a, b, c, deviendront, d'après les art. précédents, les coordonnées du centre de gravité, si, en adoptant, d'ailleurs, la notation de l'art. cité, on désigne par P', P'' etc. les forces dont les molécules du corps sont animées en vertu de la pesanteur; mais ces forces, art. 265, sont proportionnelles aux masses des molécules, on peut donc, dans les valeurs de a, b, c, substituer les masses aux forces; désignant par m la masse d'une des molécules, et par M, la somme de toutes les masses du corps, ou du système de corps, les formules de l'art. 258 deviennent

$$a=\frac{\Sigma(mx)}{M}\;;\;b=\frac{\Sigma(my)}{M}\;;\;c=\frac{\Sigma(mz)}{M}.$$

274. Les forces qui sollicitent le système n'entrent plus dans ces équations; la position du point, qui a a, b et c pour coordonnées, devient entièrement indépendante de toute force qu'on pourrait supposer appliquée au système, et se détermine uniquement, par les rapports de positions et de masses entre les molécules qui le composent; ce point est donc alors, plutôt un centre de *masses* qu'un centre de *forces*; aussi Euler, en traitant des phénomènes du mouvement, dans l'analyse desquels il faut continuellement faire entrer les masses en considération, l'a-t-il appelé centre d'*inertie*, parceque l'*inertie* des corps est proportionnelle à leur masse. Les motifs de ces dénominations seront mieux sentis par les élèves, quand ils auront suivi la seconde partie du cours.

275. Les forces dues à la pesanteur, qui sont proportionnelles aux masses des molécules, dans les corps hétérogènes, deviennent proportionnelles à leurs volumes dans les corps homogènes. On peut donc, quand il s'agit de ces derniers corps, substituer, dans les équations des art. 258 et 273, les volumes, soit aux forces, soit aux masses; désignant par ω un des solides ou volumes élémentaires de l'espace total qu'occupe un corps homogène, et par Ω cet espace total, les formules des art. cités deviennent

$$a=\frac{\Sigma(\omega x)}{\Omega}\;;\;b=\frac{\Sigma(\omega y)}{\Omega}\;;\;c=\frac{\Sigma(\omega z)}{\Omega}$$

276. Le point dont les coordonnées se calculent par ces dernières équations, a le nom particulier de *centre de figure ;* c'est un point purement *géométrique,* sa position, entièrement indépendante de toute considération de forces et de masses, se déterminant uniquement par la figure et l'étendue du corps.

Propositions générales, sur les centres de gravité, déduites de la théorie précédente.

277. La position du centre de gravité et celles des molécules d'un corps ou d'un système de corps, sont rapportées aux trois axes des x, y et z ; les lettres a, b, c désignent les coordonnées de ce centre, respectivement parallèles aux x, y, z ; m représente un élément de masse, M la masse totale du système, et on a, art. 273, les équations

$$a=\frac{\Sigma(mx)}{M};\ b=\frac{\Sigma(my)}{M};\ c=\frac{\Sigma(mz)}{M}.$$

dans lesquelles les lettres m, x, y et z, sous le signe Σ, désignent les molécules m', m'' etc. en nombre fini ou infini, et leurs coordonnées respectives x', x'', etc. y', y'', etc. z', z'' etc. Plaçons l'origine des x, y et z, au centre de gravité, nous aurons $a=0$, $b=0$, $c=0$, d'où

$$\Sigma(mx)=0\ ;\ \Sigma(my)=0\ ;\ \Sigma(mz)=0\ ;$$

278. Ces équations ayant lieu par rapport à trois plans coordonnés, qui ont une intersection commune au centre de gravité, une équation de même forme à lieu par rapport à un plan, de position quelconque, qui passerait par le même centre. Pour le démontrer, par des considérations purement géométriques, je désigne par ξ la longueur de la perpendiculaire abbaissée de la molécule m sur ce dernier plan, et j'ai, par les théorêmes connus de la géométrie analytique,

$$\xi=Ax+By+Cz$$

A, B et C étant des quantités constantes dans l'étendue du corps ou du système de corps; donc

$$\Sigma(m\xi)=A\,\Sigma(mx)+B\,\Sigma(my)+C\,\Sigma(mz)$$

et comme on a, par hypothèse, $\Sigma(mx)=0$, $\Sigma(my)=0$, $\Sigma(mz)=0$, on a aussi, par conséquent, $\Sigma(m\xi)=0$. *C. Q. F. D.*

279. L'inverse du théorême précédent est vraie ; si on a par rapport au plan xy, qui représente un plan quelconque, $\Sigma(mz)=0$, ce plan

contiendra nécessairement le centre de gravité. En effet, pour calculer la distance de ce centre à un plan parallèle au plan xy et placé à une distance k de ce plan, on aurait, en désignant la distance cherchée par c,

$$c=\frac{\Sigma\{m(z+k)\}}{M}=\frac{\Sigma(mz)+kM}{M}=k+\frac{\Sigma(mz)}{M}$$

d'où on tire $c=k$, puisque $\Sigma(mz)=0$, par l'état de la question.

280. Les équations $aM=\Sigma(mx)$, $bM=\Sigma(my)$, $cM=\Sigma(mz)$, qui ont lieu pour des coordonnées rectangulaires, auraient également lieu si les axes de ces coordonnées faisaient entr'eux des angles quelconques, car si on mène, du centre de gravité, et de chaque molécule m, des lignes parallèles qui se terminent au plan yz, par exemple, ces lignes auront entr'elles les mêmes rapports que les lignes a, x', x'', etc; on pourra donc substituer les premières aux dernières, dans l'équation $aM=\Sigma(mx)$, ou rendre a, et les x, parallèles à un axe qui ne serait pas perpendiculaire au plan yz; le même raisonnement s'applique aux équations $bM=\Sigma(my)$, $cM=\Sigma(mz)$; et comme cette propriété est indépendante de toutes valeurs absolues de a, b, c, elle a lieu pour les équations $\Sigma(mx)=0$, $\Sigma(my)=0$, $\Sigma(mz)=0$.

281. Lorsqu'un plan partage un corps, ou un système de corps, en deux parties dont les masses sont égales, et que chaque élément de masse de l'une des parties, a, dans l'autre, un élément de masse qui lui est égal et qui est placé de manière que le plan coupant passe par le milieu de la ligne qui joint les deux éléments, ce même plan renferme le centre de gravité du corps ou du système de corps.

Les deux parties du corps ou du système de corps, séparées par le plan, peuvent, considérées quant à la figure et a l'étendue, n'être ni égales ni semblables.

Ce théorème est une conséquence évidente de celui de l'art. 279.

282. S'il existe dans un système de corps homogènes, c'est-à-dire dont toutes les molécules soient de même densité, un point, ou un axe, tels que tout plan, passant par ce point, ou par cet axe, partage le système en deux parties égales, semblables et placées symétriquement par rapport au plan coupant, le centre de gravité du système sera, ou au point unique, ou sur l'axe, commun, à tous les plans coupants, puisque, d'après l'article précédent, chacun de ces plans renferme le centre de gravité.

283. Lorsqu'on connait les positions particulières des centres de gra-

vité de différents corps, qui composent un système, on peut, dans la détermination du centre de gravité du système, considérer chacun de ces corps comme un point matériel occupant la place du centre de gravité de ce même corps, et ayant une masse égale à la sienne, ce qui a lieu, encore, pour un système de corps ou de points matériels, séparés les uns des autres.

En effet, M', M'', etc. étant les corps, ou systèmes de points matériels, et μ l'élément de l'un d'eux, de M', par exemple, dont ξ, η et ζ sont les coordonées parallèles aux x, y et z; ce système fournira au numérateur de la valeur de a, art. 273 et 277, le terme $\Sigma(\mu\xi)$, et au dénominateur de la même valeur, le terme M'; mais a' étant la distance du centre de gravité de M' au plan yz, on a $a'M' = \Sigma(\mu\xi)$; donc la valeur de a sera $= \frac{a'M' + a''M'' + \text{etc.}}{M' + M'' + \text{etc.}} =$ la distance, au plan yz, d'un système de points matériels dont les masses seraient M', M'', etc., et dont les distances respectives, à ce plan yz, seraient a', a'' etc.

284. Il suit, de là, que si les différents corps d'un système, ou les éléments d'un corps ont leurs centres de gravité particuliers sur une ligne droite, ou sur un plan, le centre de gravité du système ou du corps sera sur cette ligne ou sur ce plan.

285. E étant la distance entre les centres de gravité de deux corps M' et M'' et x la distance du centre de gravité de M' au centre de gravité commun des deux corps, qui, d'après ce qui vient d'être dit, doit se trouver sur la droite joignant les deux centres particuliers; on a art. 277 et 283

$$M'x = M''(a - x)$$

d'où .... $x = \frac{aM''}{M' + M''}$

chacune des masses M' et M'' est proportionnelle à la distance du centre commun de gravité à l'autre masse; c'est ce que donne immédiatement le théorème fondamental de la composition des forces parallèles.

286. La position du centre de gravité d'un système de corps, dont la masse totale $= M$, étant donnée, si on retranche de ce système une masse M', et qu'on lui ajoute une masse M'', les positions des centres de gravité particuliers de ces deux masses étant aussi connues, la distance au plan yz du centre de gravité du système, ainsi changé, sera art. 277 et 283.

$$a = \frac{\Sigma(mx) + a''M'' - a'M'}{M + M'' - M'}$$

a' et a'' sont les distances respectives des centres de gravité de M' et M'' au plan xy. Les valeurs de b et de c sont de même forme que celle de a.

Lorsque $M'' = M'$, la distance primitive, ou la valeur qu'avait l'abcisse a, avant que le corps M eût éprouvé aucun changement, subit, par ce changement, une variation $= \frac{a''M'' - a'M'}{M}$.

J'aurai occasion d'employer ce théorême quand je parlerai de l'équilibre des corps flottants.

287. Les équations d'équilibre des forces concourantes en un seul point, données art. 72 et 77, peuvent être mises sous la forme suivante

$$\Sigma(\mu x) = 0;\ \Sigma(\mu y) = 0;\ \Sigma(\mu z) = 0$$

en prenant le point commun sur lequel toutes les forces sont dirigées pour l'origine des x, y, z, substituant, à chaque force, une ligne, proportionnelle à cette force, prise sur sa direction, et considérant cette ligne comme le rayon vecteur du centre de gravité d'une masse μ, qui est la même pour touts les rayons vecteurs, ou à toutes les extrémités des lignes représentant les forces et prises sur leurs directions. En effet, $P\cos.\alpha$, $P\cos.\beta$, $P\cos.\gamma$, qui sont les projections orthogonales de la ligne représentant une des forces P, deviennent les coordonnées x, y et z de l'extrémité de cette ligne ou du centre de gravité de la masse μ; on a donc, par les équations d'équilibre,

$$\Sigma(x) = 0;\ \Sigma(y) = 0;\ \Sigma(z) = 0$$

et multipliant tous les termes, qui entrent dans ces sommes, par la masse constante μ, on retrouve les trois équations posées ci-dessus, desquelles résultent ce théorême curieux, dû à Leibnitz: « si plusieurs forces, con-« courantes en un point, et en équilibre, sont representées par des « lignes prises sur leurs directions, et, qu'aux extrémités de ces lignes, « soient placés les centres de gravités de masses égales entr'elles, le point « de concours des forces en équilibre sera le centre de gravité commun « du systême de ces masses. »

Ce cas d'équilibre offre encore une autre propriété; la somme des carrés des distances du point de concours des forces en équilibre, aux extrémités des lignes qui représentent ces forces (égale à la somme des

carrés de ces lignes elles mêmes) est un minimum. Cette propriété va être démontrée dans l'article suivant.

288. Les positions des molécules d'un corps homogène M étant rapportées à des coordonnées x, y, z dont l'origine est à un point quelconque de l'espace, cherchons la position particulière d'un point tel que la somme des carrés de ses distances à toutes les molécules soit un minimum.

a, b, et c étant les coordonnées du point cherché, respectivement parallèles aux x, y et z, la somme des carrés des rayons vecteurs sera

$$\Sigma \{ (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 \} = minimum$$

différentiant, sous le signe, égalant séparément à zéro les différentielles des variables indépendantes, et multipliant chacun des termes des sommes nulles, par la différentielle de masse m, supposée constante dans l'étendue entière du corps, on parvient aux équations

$$a=\frac{\Sigma (mx)}{M}\;;\; b=\frac{\Sigma (my)}{M}\;;\; c=\frac{\Sigma (mz)}{M}$$

le point cherché est le centre de gravité de la masse M; et, d'après l'article précédent, si on applique, à tous les points qu'occupent les molécules m, des forces, dirigées sur le centre de gravité, (c'est-à-dire qui tendent à pousser leurs points d'applications vers ce centre) et qui soient proportionnelles aux distances entre ces points et ce même centre, ces forces seront en équilibre.

289. La méthode qu'on employe le plus fréquemment, pour avoir une valeur *moyenne* entre plusieurs valeurs différentes entr'elles et qui pèchent, les unes par excès et les autres par défaut, consiste à chercher le quotient de la somme des quantités anomales divisée par le nombre de ces quantités. Cette opération se réduit, au fond, à déterminer la distance d'un centre de gravité; soient z', z'', $z^{(n)}$, les n nombres entre lesquels on cherche un nombre moyen; ce nombre $=\dfrac{z'+z''+\ldots\ldots+z^{(n)}}{n}$; considérons les z comme les distances, au plan xy, des centres de gravités de n masses égales chacune à μ, le nombre cherché aura encore, pour valeur, $\dfrac{z'\mu+z''\mu+\ldots\ldots+z^{(n)}\mu}{n\mu}$, expression qui donne la distance, au plan xy, du centre de gravité du système des masses μ, les

coordonnées des centres de gravités de ces masses, parallèles au plan xy, demeurant arbitraires.

290. Les équations $aM = \Sigma(mx)$, $bM = \Sigma(my)$, $cM = \Sigma(mz)$ donnent

$$a^2+b^2+c^2 = \frac{[\Sigma(mx)]^2+[\Sigma(my)]^2+[\Sigma(mz)]^2}{[\Sigma(m)]^2} \quad \ldots \quad (1)$$

c'est le carré de la distance du centre de gravité à l'origine des coordonnées. J'observe maintenant qu'on a

$$[\Sigma(mx)]^2 = \Sigma(m^2x^2)+2\,\Sigma(mm'xx') \quad \ldots \quad (2)$$

l'expression $\Sigma(mm'xx')$ désignant la somme des produits de toutes les combinaisons, deux-à-deux, des facteurs $m'x'$, $m''x''$, etc., dans lesquelles ces facteurs ne sont pas de même accent.

On a, de plus,

$$2\,\Sigma(mm'xx') = \Sigma(mm'x^2) - \Sigma[mm'(x-x')^2] \quad \ldots \quad (3)$$

l'expression $\Sigma(mm'x^2)$ désignant la somme des produits donnés par les combinaisons faites, deux-à-deux, des facteurs m', m'', etc. avec les facteurs $m'x'^2$, $m''x''^2$, etc. en excluant les couples de facteurs de mêmes accents; et l'expression $\Sigma[mm'(x-x')^2]$ désignant la sommé des produits qu'on obtient, en prenant, d'une part, tous les produits deux-à-deux des molécules m, les carrés m^2 exceptés, d'une autre part, toutes les secondes puissances des différences $x-x'$, et multipliant chaque produit mm' par le carré $(x-x')^2$ de la différence qui a les mêmes accents.

enfin . . . . $\Sigma(m^2x^2) = \Sigma(mx^2)\,\Sigma(m) - \Sigma(mm'x^2) \quad \ldots \quad (4)$

introduisant ces valeurs dans l'équation (2), on a,

$$[\Sigma(mx)]^2 = \Sigma(mx^2)\,\Sigma(m) - \Sigma[mm'(x-x')^2] \quad \ldots \quad (5)$$

et on trouverait pareillement

$$[\Sigma(my)]^2 = \Sigma(my^2)\,\Sigma(m) - \Sigma[mm'(y-y')^2]$$
$$[\Sigma(mz)]^2 = \Sigma(mz^2)\,\Sigma(m) - \Sigma[mm'(z-z')^2],$$

au moyen de quoi le carré $a^2+b^2+c^2$ de la distance du centre de gravité du système à l'origine des coordonnées se calcule par l'équation

$$a^2+b^2+c^2 = \frac{\Sigma\{m(x^2+y^2+z^2)\}}{\Sigma(m)} - \frac{\Sigma\{mm'[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]\}}{[\Sigma(m)]^2}$$

on a ainsi le carré de la distance du centre de gravité, à un point de

l'espace, en fonction des carrés des distances de chaque molécule au même point, et des carrés des distances des molécules entr'elles ; et trois équations pareilles, rapportées à trois points de l'espace qui ne sont pas en ligne droite, donnent la position absolue du centre de gravité d'un corps homogène de forme donnée, sans qu'on soit obligé de rapporter les positions de ses molécules à des plans coordonnés. (*)

Formules pour la détermioation des centres de gravité des ligoes, des surfaces et des solides.

291. Si on considère chacun des éléments ds d'un arc de courbe à double courbure, d'une longueur déterminée, comme ligne matérielle, infiniment petite, et qu'on suppose la masse de cet élément proportionnelle à sa longueur, on aura les formules, pour la détermination du centre de gravité, ou de figure, de cet arc de courbe en substituant,

---

(*) Voici quelques développements sur l'aoalyse qui doooe l'équation (5) ou la valeur ultérieure de $[\Sigma(mx)]^2$.

On a d'abord

$$\Sigma(mx^2)\Sigma(m)=(m'x'^2+m''x''^2+\text{etc.})(m'+m''+\text{etc.})=\ldots\ldots\ldots$$
$$m'^2x'^2+m''^2x''^2+\text{etc.}+m'm''x''^2+m'm'''x'''^2+\text{etc.}$$
$$+m''m'x'^2+m''m'''x'''^2+\text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

ainsi $\Sigma(mx^2)\Sigma(m)=\Sigma(m^2x^2)+\Sigma(mm'x^2)$; c'est l'équation (4).

On a ensuite

$$\Sigma[mm'[x-x]^2]=\begin{cases} m'm''x'^2+m'm'''x'^2+\text{etc.}\\ +m''m'x''^2+m''m'''x''^2+\text{etc.}\\ \text{etc.}\\ -2(m'm''x'x''+m'm'''x'x'''+\text{etc.})\\ -2(m''m'''x''x'''+\text{etc.})\\ \text{etc.}\end{cases}$$

ou, $\Sigma[mm'(x-x')^2]=\Sigma(mm'x^2)-2\Sigma(mm'xx')$; c'est l'équation (3).

Enfin

$$2\Sigma(mm'xx')=\begin{cases} m'x'(m'x'+m''x''+\text{etc.})-m'^2x'^2\\ +\ m''x''(m'x'+m''x''+\text{etc.})-m''^2x''^2\\ +m'''x'''(m'x'+m''x''+\text{etc.})-m'''^2x'''^2\end{cases}$$
$$\text{etc.}\qquad\qquad\text{etc.}$$

ou $2\Sigma(mm'xx')=[\Sigma(mx)]^2-\Sigma(m^2x^2)$; c'est l'équation (2). L'équation (5) résulte de la combinaison des équations (2), (3) et (4).

dans

dans les équations de l'art. 273, ds ou $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$, à m, et s ou $\int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$, à M; on employera, au lieu du signe Σ, le signe $\int$ qui indiquera une intégrale définie; ces équations deviendront, alors, a, b et c étant, comme à l'art. cité, les coordonnées du centre de gravité cherché respectivement parallèles aux x, y et z

$$a=\frac{\int x\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{s}$$

$$b=\frac{\int y\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{s}$$

$$c=\frac{\int z\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{s}$$

la détermination du centre de gravité de l'arc de courbe à double courbure exige, ainsi, le calcul de quatre intégrales définies, dont les limites correspondent aux points extrêmes de cet arc. Ces intégrales peuvent toujours être ramenées aux *quadratures*, puisque les deux équations de la courbe, donnent y, dy, z, dz en fonctions de x et dx, au moyen de quoi les numérateurs des valeurs de a, b et c, et le dénominateur commun s, ou $\int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$, sont réduits à ne renfermer que x, dx et des constantes. Ces quatre intégrales étant d'abord trouvées, sous une forme indéfinie, on y donnera, successivement, à x les valeurs correspondantes aux extrémités de l'arc, et les différences, entre les résultats des substitutions de ces valeurs limites, donneront les intégrales définies cherchées.

292. Les formules pour trouver le centre de gravité d'un arc de courbe plane dont les coordonnées sont x et y, se déduisent des précédentes en supprimant la différentielle dz dans les deux premières, observant que $s=\int\sqrt{dx^2+dy^2}$ et ne tenant aucun compte de la troisième équation. Ce centre de gravité doit, d'après l'art. 284, se trouver dans le plan sur lequel la courbe est tracée.

On a, ainsi, pour les courbes planes,

$$a=\frac{\int x\sqrt{dx^2+dy^2}}{s}$$

$$b=\frac{\int y\sqrt{dx^2+dy^2}}{s}$$

la détermination du centre de gravité exige le calcul de trois intégrales

définies, qui ne donnent pas lieu à d'autres observations que celles consignées dans l'article précédent.

293. Il peut se faire que l'un des axes, celui des x, par exemple, divise la courbe en deux parties égales et semblables, dans ce cas le centre de gravité commun de deux éléments de courbe correspondants à une même abcisse x, sera sur l'axe des x, et art. 282, le centre de gravité de l'arc entier s'y trouvera aussi. On aura donc $b=0$ et la distance a sera la seule à calculer.

294. Pour trouver le centre de gravité d'un système de lignes droites et de lignes courbes, ces dernières étant assujetties à différentes lois, il faut, d'abord, avoir les centres de gravité particuliers de chacune de ces lignes, et on en déduit ensuite le centre de gravité commun, d'après ce qui est dit art. 283.

295. Une surface courbe étant considérée comme une enveloppe matérielle, homogène, et uniformément épaisse, on a le centre de gravité d'une partie déterminée de cette surface, en substituant, dans les équations de l'art. 273, à M, mx, my et mz, respectivement, $\int \omega\, dx\, dy$, $\omega\, x\, dx\, dy$, $\omega\, y\, dx\, dy$, $\omega\, z\, dx\, dy$; et faisant, comme à l'article 93, $\omega = \{1+(\frac{dz}{dx})^2+(\frac{dy}{dy})^2\}^{\frac{1}{2}}$. On sait que $\omega\, dx\, dy$ est l'élément differentio-différentiel de la surface courbe, et doit, par conséquent, représenter l'élément de masse m; on aura, ainsi, pour calculer la position du centre de gravité d'une surface quelconque

$$a=\frac{\int \omega\, x\, dx\, dy}{\int \omega\, dx\, dy}$$

$$b=\frac{\int \omega\, y\, dx\, dy}{\int \omega\, dx\, dy}$$

$$c=\frac{\int \omega\, z\, dx\, dy}{\int \omega\, dx\, dy}$$

les intégrales définies seront prises dans l'étendue entière de la portion de surface dont on veut avoir le centre de gravité; ces intégrales sont de l'espèce de celles qu'on appelle *doubles*, et qu'on prend par rapport à deux variables, successivement considérées comme constantes. C'est par le moyen de l'équation de la surface qu'on ramene chaque fonction à intégrer, à ne renfermer que ces deux variables et leurs diffé-

rentielles, et les limites des intégrales, sont, en général, exprimées par des fonctions de ces mêmes variables.

296. On voit que la détermination du centre de gravité d'une surface courbe exige, le plus souvent, des calculs, sinon difficiles, du moins longs et pénibles; ces calculs se simplifient beaucoup lorsqu'il sagit du centre de gravité d'une surface de révolution. Prenant l'axe de révolution pour axes des x, et rapportant les positions des différents points de la courbe génératrice aux coordonnées x et y, si on fait deux sections de la surface, par deux plans, perpendiculaires à l'axe des x, dont l'un soit à la distance x et l'autre à la distance $x+dx$ de l'origine, ces deux plans renfermeront, entr'eux, une zone circulaire de la surface courbe, engendrée par le mouvement de l'élément ds de la courbe génératrice, pendant que l'arc s engendre la surface finie dont cette zone est la différentielle. π étant la demi-circonférence qui a l'unité pour rayon, la surface de la zone élémentaire $=2\pi y\,ds$; son centre de gravité est, art. 282, entre les plans coupants, sur l'axe des x, ou de révolution, et art. 284, le centre de gravité de la surface est sur le même axe, d'après la suppositiont faite qu'elle a, pour limites, deux plans perpendiculaires aux x; on n'a donc, pour calculer la distance a, du centre de gravité cherché, à l'origine, qu'à substituer dans la première équation de l'artticle 273, $2\pi y\,ds$, à m, et $2\pi xy\,ds$, à mx, ce qui donne,

$$a=\frac{\int xy\,ds}{\int y\,ds}$$

et cette équation suffit, puisque le centre de gravité est sur l'axe des x; on réduira, au moyen de l'équation de la courbe génératrice les expressions $xy\,ds$ et $y\,ds$ à la forme $dx.\phi(x)$ et $dx f(x)$.

297. Une aire plane $KLL'K'K$ est circonscrite par les portions LL' et KK' des courbes VW et $V'W'$, et par les portions KL, $K'L'$ des droites BL et $B'L'$ parallèles à l'axe AY des y, ou perpendiculaires à l'axe AX des x, et il s'agit de trouver la position du centre de gravité de cette aire. Fig. 12

J'ai $AP=x$, et je fais $PP'=dx$, $PM=y$, $Pm=y'$; l'aire de l'élément de surface $MM'm'm=(y-y')dx$; on peut le considérer comme un parallélogramme rectangle, et, art. 282, son centre de gravité est au point milieu n de la parallèle $h\mu$, aux y, qui divise la surface en deux parties égales. La distance Nn de ce centre de gravité

à l'axe des y est $x+\frac{1}{2}dx$, ou x; et la distance πn du même centre, à l'axe des x, est égale à $\frac{1}{2}(y+y')$. Il faut donc, pour déterminer le centre de gravité de $LL'K'K$, en ayant égard à ce qui est dit art. 283, substituer, dans les deux premières équations de l'art. 273, $\frac{1}{2}(y+y')$, à y, $(y-y')dx$ à m, $x(y-y')dx$, à mx, et $\frac{1}{2}(y+y')(y-y')dx$, à my, ce qui donnera

$$a=\frac{\int x(y-y')dx}{\int(y-y')dx}$$

$$b=\frac{\frac{1}{2}\int(y+y')(y-y')dx}{\int(y-y')dx}=\frac{\frac{1}{2}\int(y^2-y'^2)dx}{\int(y-y')dx}$$

les équations des courbes VW et $V'W'$ serviront à ramener les expressions $x(y-y')dx$, $(y^2-y'^2)dx$, $(y-y')dx$ aux formes $dx.\phi(x)$, $dx.\chi(x)$, $dx.\psi(x)$, ϕ, χ et ψ étant des signes de fonctions; lorsque les intégrations seront effectuées, on fera successivement, dans chacune des fonctions intégrales, $x=AB$ et $x=AB'$, et retranchant les résultats de la première substitution des résultats respectifs de la seconde, on aura les intégrales définies prises dans les limites assignées.

Lorsque l'aire, dont on cherche le centre de gravité, se termine aux deux droites BL, $B'L'$, et à l'axe des x, il suffit, pour adapter, à ce cas, les formules de l'article précédent, d'y faire $y'=0$.

298. Un solide homogène, est supposé terminé, par une surface courbe dont on a l'équation, par une enveloppe cylindrique, dont la génératrice est perpendiculaire au plan xy, et par le plan xy. L'élément de ce solide est $z\,dx\,dy$, et les distances respectives du centre de gravité de cet élément aux plans xy, xz et yz sont $\frac{1}{2}z$, y et x. Il faut donc, pour trouver le centre de gravité du solide, en ayant égard à ce qui est dit art. 283, substituer, dans les équations de l'art. 273, $z\,dx\,dy$ à m, et $xz\,dx\,dy$, $yz\,dx\,dy$, $\frac{1}{2}z^2\,dx\,dy$, respectivement à mx, my, mz, on obtiendra, par ces substitutions, les valeurs

$$a=\frac{\int xz\,dx\,dy}{\int z\,dx\,dy}$$

$$b=\frac{\int yz\,dx\,dy}{\int z\,dx\,dy}$$

$$c=\frac{\frac{1}{2}\int z^2\,dx\,dy}{\int z\,dx\,dy}.$$

On réduira par le moyen de l'équation de la surface, les fonctions à intégrer, à ne renfermer que deux des variables, x et y par exemple, et leurs différentielles, et on prendra les intégrales *doubles*, dans les limites données par les courbes d'intersections du plan xy et des surfaces cylindriques qui enveloppent le solide, limites exprimées par des fonctions d'x et d'y.

299. Les calculs que ces intégrations exigent sont, en général, au moins aussi laborieux que ceux dont j'ai parlé art. 296 ; ils deviendront plus simples si le solide, dont on cherche le centre de gravité, est symétrique par rapport à un axe, c'est-à-dire si toutes ses sections planes, faites par cet axe, le partagent en deux parties égales et semblables ; le centre de gravité cherché sera art. 282 sur cet axe, que je prends pour l'axe des x, et si je fais, aux distances x et $x+dx$ de l'origine, deux sections du solide perpendiculaires à x, l'expression du volume du solide élémentaire, compris entre ces deux plans, pourra toujours se rammener à la forme $dx.\,\phi(x)$, son centre de gravité sera, art. cité, entre les deux plans coupant, sur l'axe des x, et, pour trouver le point où le centre de gravité du solide est placé, on substituera, dans la première équation de l'art. 273, $dx.\phi(x)$, à m, et $x\,dx\,(\phi x)$, à mx, ce qui donnera

$$a=\frac{\int x\,dx.\phi x}{\int dx\,\phi(x)}$$

300. Le cas traité dans l'article précédent comprend celui des solides révolutions, dans lesquels $\phi(x)$ a une valeur particulière $=\pi y^2$, en désignant, par y, l'ordonnée a la courbe génératrice ; et la formule, pour ce dernier cas est

$$a=\frac{\int x\,y^2\,dx}{\int y^2\,dx}$$

on ramène, au moyen de l'équation de la courbe génératrice, les fonctions à intégrer, à ne renfermer qu'une seule variable et sa différentielle, et on procède comme il a été dit, ci-dessus, relativement aux limites.

Application de la théorie des centres de gravité à la mesure des surfaces et des solides, connue sous le nom de Méthode de *Guldin*.

301. Guldin, Jésuite natif de S[t]. Gall, en Suisse, publia à Vienne, en Autriche, vers l'année 1640, un ouvrage, auquel il donna le titre de

Centro-baryca, dérivé des deux mots grecs *κέντρον*, *centre*, et *βάρος*, *poids*, contenant des recherches sur les centres de gravité, qui pouvaient intéresser les géomètres dans le temps où elles ont été publiées; mais ce qui distingue cet ouvrage et l'a sauvé de l'oubli, est une application, aussi utile que curieuse, de la théorie des centres de gravité à la mesure des surfaces et des solides de révolution. Voici la règle générale dont il est l'inventeur. « Si un plan se meut, en tournant autour d'une droite « fixe, contenue dans ce plan, la surface engendrée par un arc de courbe « quelconque, et le solide engendré par l'aire d'une figure fermée quel- « conque, contenus aussi dans ce même plan, auront pour valeurs res- « pectives les produits de l'arc de courbe et de la surface génératrices « par les longueurs absolues des arcs de cercles que parcourront leurs « centres de gravité. »

On peut présenter l'énoncé de cette règle sous un point de vue plus général; mais il convient de la démontrer, d'abord, pour le cas le plus simple; j'ajouterai que Guldin n'en a pas donné de démonstration directe, et ne la prouvée que par induction, en faisant voir qu'elle conduisait à des résultats parfaitement d'accord avec ceux qu'on obtenait par d'autres méthodes dont la rigueur n'était pas contestée.

Fig. 12 302. Je suppose que le plan YAX, des xy, décrive un angle χ autour de l'axe AX, des x, l'arc LL' de la courbe VMW, tracée sur ce plan, engendrera une portion de surface courbe qu'il s'agit de mesurer. Pour cela, faisant $AP=x$, $PM=y$, $PP'=dx$, $MM'=ds$, j'observe que la surface de la zone élémentaire engendrée par l'élément de courbe $MM'=ds$, sera $=$ *angle* $\chi \times$ *rayon* $\pi\mu \times MM' = \chi y\,ds$, et par conséquent la surface entière, engendrée par l'arc de courbe LML', sera $=\chi\int y\,ds$, l'intégrale étant prise, depuis $x=AB$ jusqu'à $x=AB'$, lorsqu'on a ramené, au moyen de l'équation de la courbe, l'expression $y\,ds$ à la forme $dx.f(x)$. mais b désignant, comme à l'art. 292, la distance du centre de gravité de LML' à l'axe AX, des x, l'expression $\chi\int y\,ds$ est égale, art. cité, à $b\,\chi \times LML'$, c'est-à-dire au produit de la longueur absolue $b\,\chi$ de l'arc de cercle qu'a décrit le centre de gravité, par l'arc générateur LML'; ce produit donne donc la valeur de la surface engendrée, et c'est précisément celui qu'il faut calculer, d'après la règle de Guldin, pour avoir cette surface.

Tout axe de révolution autour duquel on fait tourner un plan qui ren-

ferme la courbe, pouvant être pris pour axe des x, la règle de Guldin, pour la mesure des surfaces de révolution, se trouve rigoureusement et généralement démontrée.

303. Je passe à la mesure du solide engendré par l'aire $KLL'K'K$ lorsque le plan YAX, qui renferme cette aire, décrit un angle χ autour de l'axe AX des x. La construction et la notation de l'art. 297 étant conservées, j'observe que l'élément de surface $MM'\,mm'$ engendre, pendant le mouvement de la surface entière, une portion de couronne cylindrique, dont les rayons, intérieur et extérieur, sont respectivement y' et y, les longueurs $y'\chi$ et $y\chi$, et dont l'épaisseur est dx. La solidité de cette tranche a donc pour valeur $(\frac{1}{2}y^2\chi-\frac{1}{2}y'^2\chi)dx=\frac{1}{2}\chi(y^2-y'^2)dx$, et le volume entier du solide engendré $=\frac{1}{2}\chi f(y^2-y'^2)dx$, intégrale qu'il faut prendre depuis $x=AB$, jusqu'à $x=AB'$, lorsqu'on a ramené, au moyen des équations des courbes VW et $V'W'$, l'expression $(y^2-y'^2)\,dx$ à la forme $dx.f(x)$. mais art. 297, b étant la distance à l'axe AX, du centre de gravité de l'aire $KLL'K'K$, on a, 2ᵉ. équation de l'article cité,

$$b\,\chi\times KLLL'KK=\tfrac{1}{2}\chi f(y^2-y'^2)\,dx$$

donc le volume du solide engendré par la révolution de $KLL'K'K$, autour de AX, est égal au produit de la surface génératrice par la longueur absolue, $b\chi$, de l'arc de cercle que son centre de gravité a décrit; et ce produit est, encore, celui qu'il faut calculer, par la règle de Guldin, pour avoir la solidité cherchée.

Le solide, dont je viens de donner la mesure, est terminé par deux bases planes perpendiculaires à l'axe de révolution, et parallèles aux tranches, ou couronnes cylindriques, qui forment les éléments de ce solide; mais le cas général est celui d'un solide de révolution qui n'a aucune face plane, tel serait, par éxemple, celui qu'on obtiendrait en faisant tourner l'aire $KLL'K'K$ autour de l'axe AY des y, l'angle décrit étant toujours désigné par χ. L'élément de surface $MM'\,m'\,m$ engendrera, alors, une enveloppe cylindrique dont l'épaisseur sera $=PP'=dx$, la hauteur $=h\mu=y-y'$ et le rayon $A\pi=x+\frac{1}{2}dx=x$. La solidité de cette enveloppe aura, ainsi, pour valeur, $x\chi.(y-y')dx$, et le solide entier, engendré, sera $=\chi fx(y-y')dx$. Or a étant la distance du centre de gravité de l'aire $KLL'K'$ à l'axe AY, des y, cette intégrale, prise depuis B jusqu'en B' est, art. 297, égale à $\chi a\times KLL'K'K$;

donc le volume, du solide engendré, a la valeur donnée par la règle de Guldin.

304. Le système des courbes VW et $V'W'$ peut appartenir à une courbe unique; cette courbe peut être fermée, puisque rien n'empêche de supposer $KL = 0$, $K'L' = 0$, sans que les distances intermédiaires μh soient nulles; elle peut aussi avoir des branches infinies sur lesquelles on prend des arcs finis, et des cordes, pour limiter l'aire etc. etc. Ainsi la règle de Guldin, pour les solides de révolution, est vraie sans exception.

Les deux courbes VW et $V'W'$ pourraient se confondre en une seule, la différence $y - y'$ étant susceptible de prendre toutes les valeurs, et, par conséquent, de devenir nulle ou infiniment petite; le solide engendré se réduit, alors, à une enveloppe infiniment mince, ou à une surface, et la règle de Guldin, pour les solides, justifie l'application de cette même règle aux surfaces de révolution.

305. J'ai dit, art. 301, qu'elle était susceptible d'un énoncé plus général; voici cet énoncé : « Si un plan se meut perpendiculairement à « une courbe fixe, à simple ou double courbure, la surface engendrée « par une ligne courbe, de forme et de longueur arbitraires, tracée sur « ce plan, et le solide engendré par une portion du même plan que cir« conscrivent des lignes quelconques, auront pour mesures, les produits « respectifs des arcs de courbes que les centres de gravité, de la courbe « et de l'aire mobiles, parcourront, dans leurs mouvements, par la lon« gueur de la courbe mobile et par le nombre d'unités de surface com« prises dans l'aire mobile. »

La vérité de ce théorème général sera facilement sentie si on considère que le plan mobile, parcourant un élément ds' de la courbe fixe, décrit un arc de cercle, infiniment petit, autour d'un axe, passant par le centre de courbure de l'élément ds', perpendiculaire au plan qui renferme ce centre et cet élément ds'. La courbe et l'aire, mobile et génératrices, engendreront donc, respectivement, un élément de surface et un élément de solide dont on aura la valeur par la règle de Guldin, ensorte que S étant la courbe génératrice, A l'aire génératrice, e' et ε' les lignes respectives, infiniment petites, que leurs centres de gravité parcourent pendant que le plan, qui les renferme, parcourt l'élément ds', la surface et le solide élémentaires engendrés seront $S e'$ et $A \varepsilon'$; on aura ainsi, pour la somme de toutes les surfaces et de tous les

les solides élémentaires engendrés pendant que le plan mobile parcourt une longueur $ds'+ds''+ds'''+$ etc. de la courbe fixe, des expressions de la forme $S(e'+e''+e'''+\text{etc.})$, $A(e'+e''+e'''+\text{etc.})$ ce qui est l'énoncé analytique du théorème général.

306. Je terminerai ce que j'ai à dire sur le théorème de Guldin, en le présentant sous un point de vue plus général encore, que le précédent; qu'on imagine une portion de surface courbe, désignée par Ω, circonscrite par un périmètre à double ou simple courbure, et assujettie à tourner autour d'un axe fixe, par rapport auquel elle a une position quelconque, mais invariable; le solide, engendré par cette surface, se mesurera de la manière suivante : faites passer par l'axe de révolution un plan appelé plan K, qui tourne, autour de cet axe, comme la surface Ω, en conservant, avec elle, une position constante; par un des points du périmètre de cette surface, que je désigne par point ω, menez un plan perpendiculaire à l'axe de révolution appellé plan Π, qui coupera cet axe en un certain point, de ce dernier point, comme centre, et d'un rayon égal à sa distance au point ω, décrivez, sur le plan Π, un arc de cercle, qui commençant au point ω se termine au plan K, vous aurez, sur ce plan K, un point, qu'on peut appeler la *projection circulaire* du point ω; faites les projections pareilles de tous les points du périmètre de la surface Ω, vous aurez, sur le plan K, une courbe plane dont l'aire, dans son mouvement commun avec la surface Ω, engendrera un solide, qui pourra être cubé par la règle de l'art. 301, et qui, pour un angle donné, décrit autour de l'axe de révolution, sera égal au solide engendré par la surface Ω.

Il est aisé de vérifier l'égalité des deux solides; prenez, sur la surface Ω, trois points infiniment près les uns des autres, qui ne soient pas en ligne droite, et faites leurs *projections circulaires* sur le plan K; il est évident que, dans le mouvement commun de la surface Ω et du plan K, les trois points projettés engendreront un prisme circulaire de même longueur, et de même section transversale et normale, que le prisme engendré par leurs trois points de projection ; et la même égalité ayant lieu entre tous les prismes élémentaires pareils, qui se correspondent de l'un à l'autre solide, a aussi lieu, par conséquent, entre les sommes des éléments ou les solides entiers.

Exemples de la détermination des centres de gravité, et de l'application de la règle de Guldin.

307. En considérant les périmètres des figures planes comme des lignes matérielles, homogènes et uniformément grosses, on a, sur le champ, par les théorêmes des art. 281 et 282, le centre de gravité d'une ligne droite, qui est à son point milieu, celui du contour d'un parallélogramme qui est à l'intersection des deux diagonales, celui du périmètre d'un poligonne régulier, qui est placé au centre du cercle inscrit ou circonscrit, enfin celui du périmètre fermé d'une figure plane quelconque lorsqu'il existe deux axes rectilignes qui peuvent le partager, chacun, en deux parties égales, semblables et placées symétriquement de part et d'autre de cet axe; le point d'intersection, de ces deux lignes est, art. 281, le centre de gravité du périmètre.

Fig. 13

308. Pour trouver le centre de gravité du contour ABC d'un triangle, imaginons que la masse de chacun des côtés est rassemblée, en un seul point, placé à son centre de gravité, ou au milieu de ce côté, ensorte que les points matériels c, a et b, placés aux milieux des côtés AB, BC et CA, représentent respectivement, les masses de ces lignes. Le centre de gravité du contour ABC sera, art. 283, le même que celui des points matériels a, b et c; je joins ces points par les droites ab, bc et ac, et je partage en deux parties égales l'angle bca par la ligne cd; cette construction me donne $ad : db :: ca : cb :: CA : CB ::$ *masse* b : *masse* a; le centre de gravité de a et b est donc, art. 285, en d, et, art. 284, le centre de gravité de a, b et c doit se trouver sur la ligne cd. Je fait, sur les angles cab et abc, la même opération déja faite sur l'angle bca, et j'ai deux autres lignes af et bk sur chacune desquelles se trouve aussi le centre de gravité cherché, lequel occupe leur point G d'intersection commune.

Ce point G est au centre du cercle circonscrit au triangle abc; ainsi, le centre de gravité du contour d'un triangle donné, est au centre du cercle circonscrit à un autre triangle ayant les sommets de ses angles aux points milieux des côtés du triangle donné.

309. Le centre de gravité d'un arc de cercle est, art. 293, sur le rayon, désigné par r, qui le divise en deux parties égales. Je compte les x, sur ce rayon, en prenant leur origine au centre de l'arc de cercle, et con-

sidérant, d'après l'art. 283, les deux éléments ds, qui répondent à une même abcisse x, comme réunis à l'extrémité de cette abcisse, la 1e. équation de l'art. 292, devient la seule nécessaire dans la détermination dont il s'agit ici. J'ai donc $a = \frac{2\int x\,ds}{2\int .\,ds}$, ou (comme par la propriété du cercle, $ds = \frac{r\,dy}{x}$) $a = \frac{2\,r\int dy}{2\int s} = \frac{2\,ry + C}{2s + C'}$. Si on suppose que les intégrales s'évanouissent lorsque $y = 0$ et $s = 0$, la valeur $\frac{2\,ry}{2s}$, ou la distance du centre de gravité d'un arc de cercle $2s$, au centre de ce cercle, mesurée sur le rayon qui divise l'arc en deux parties égales, sera quatrième proportionnelle à l'arc, à la corde $2y$ et au rayon r.

310. Les centres de gravité des surfaces de tous les polygones réguliers sont art. 282, aux centres des cercles qui leur sont inscrits ou circonscrits; et, en général, lorsqu'une figure plane peut avoir deux axes rectilignes, dont chacun la divise en deux parties égales, semblables et placés symétriquement de part et d'autre de cet axe, le centre de gravité de cette figure est, art. 281, à l'intersection des deux axes.

Ainsi le centre de gravité de la surface d'un parallélogramme est à l'intersection de ses deux diagonales; le centre de gravité de la surface d'une éllipse est à l'intersection de ses deux axes etc. ces centres sont aux mêmes points où se trouvent les centres de gravité des périmètres.

311. Le centre de gravité de la surface d'un triangle rectiligne est, art. 284, sur la ligne droite, que je prends pour axe des x, menées du sommet d'un des angles, où je place l'origine des x, au milieu du côté opposé à cet angle, puisque cette ligne, ou axe des x, passe par les centres de gravité de tous les trapèzes élémentaires qu'on peut former par des parallèles au côté qu'elle coupe en deux parties égales.

Je nomme g la longueur de l'axe des x, comprise dans le triangle, h le côté opposé à l'origine des x, et χ l'angle formé par les lignes g et h la valeur d'un des trapèzes élémentaires de la surface, pris parallèlement à h, sera $\frac{h}{g}\,x\,dx$ sin. χ, et ce trapèze (qui, en ayant égard à ce qui est dit art. 280, représente le trapèze dont la valeur générale est, art. 297, $(y - y')\,dx$) ayant son centre de gravité sur l'axe des x, on a, art. 284, $b = 0$, et la 1e. équation de l'art 297, devient

$$a = \frac{\frac{h}{g}\,\text{sin.}\,\chi \int x^2\,dx}{\frac{h}{g}\,\text{sin.}\,\chi \int x\,dx} = \frac{\frac{1}{3}x^3 + C}{\frac{1}{2}x^2 + C'}$$

prenant l'intégrale, depuis $x=0$ jusqu'à $x=g$, la distance du centre de gravité du triangle entier à l'origine des x et de g, devient $a=\frac{2}{3}g$.

312. Imaginons trois masses égales dont chacune ait son centre de gravité placé à l'un des angles du triangle; le centre de gravité commun de deux de ces masses sera au point d'intersection de g et de h, et par conséquent, art. 284 et 285, le centre de gravité des trois masses sera aux $\frac{2}{3}$ de g à partir de l'angle opposé à h, ce centre de gravité aura donc la même position que le centre de gravité du triangle.

313. En prenant l'intégrale de l'art. 211, depuis $x=g_{,}$ jusqu'à $x=g$, on a $a=\frac{2}{3}\,\frac{g^3-g_{,}^3}{g^2-g_{,}^2}$ équation qui détermine la position du centre de gravité d'un trapèze, sur la ligne coupant, en deux parties égales, chacun de ses cotés parallèles; la distance du centre dont il s'agit, au plus petit côté, mesurée sur cette ligne, étant $a-g_{,}=\xi$. Pour obtenir la valeur de ξ sous la forme la plus simple, je désigne le plus petit coté du trapèze par $h_{,}$, le plus grand par h, la distance, entre leurs points milieux, par K, ce qui donne $g=\frac{h}{h-h_{,}}\,.\,K\,;\; g_{,}=\frac{h_{,}}{h-h_{,}}\,K\,;$ je mets, ensuite, la valeur de a, trouvée ci-dessus, sous la forme

$$a=\frac{2}{3}\,.\,\frac{g^2+gg_{,}+g_{,}^2}{g+g_{,}}=\frac{2K}{3\,(h-h_{,})}\,.\,\frac{h^2+hh_{,}+h_{,}^2}{h+h_{,}}$$

et j'ai, ultérieurement, pour calculer $a-g_{,}$ ou ξ, l'équation

$$\xi=\frac{K(2h+h_{,})}{3\,(h+h_{,})}$$

314. Archimède, qui a posé les fondements de la Statique, a aussi déterminé les premiers centres de gravité, et particulièrement celui d'un segment parabolique. Soit un pareil segment circonscrit par la courbe et par une double ordonnée $2y$, à l'axe; on sait que les x étant comptées du sommet, on a $y^2=px$ et les valeurs, déduites de cette équation, substituées dans la valeur $a=\frac{\int xy\,dx}{\int y\,dx}$ qu'on obtient, art. 297,

en faisant $y' = -y$, donnent, lorsque les intégrales commencent à l'origine des x et des y, $a = \frac{3}{5}x$.

Cette valeur suffit parceque, art. 284, le centre de gravité du segment parabolique terminé par une double ordonnée à l'axe doit être sur cet axe.

315. Les coordonnées d'une éllipse étant comptées sur les axes, et leur origine placée au centre, l'équation de la courbe est $y = K(A^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$; K est une constante, et A la demi-longueur de l'axe sur lequel on compte les x. Pour trouver le centre de gravité de la surface d'un segment elliptique partagé en deux parties égales par le demi-axe A, et dont la flèche $= A - x$, on combinera l'équation précédente avec la valeur $a = \frac{\int xy\,dx}{\int y\,dx}$, qu'on obtient, comme à l'art. précédent, en faisant $y' = -y$ dans la première équation de l'article 297, et on trouvera, $a = \frac{\int x\,dx\,(A^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{\int (A^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx}$; le rapport K a disparu de cette valeur, qui est la même à laquelle on serait parvenu en cherchant le centre de gravité de la surface du segment d'un cercle décrit avec le rayon A, ayant même centre que l'ellipse, la flèche du segment elliptique, étant aussi celle du segment circulaire, qui doit se trouver, comme le premier, partagé en deux parties égales par le rayon ou demi-axe A. Le centre de gravité des deux segments est donc au même point, et on a, pour l'un et pour l'autre, en plaçant la première limite des intégrales au point où $x = x_{,}$ et la seconde au point où $x = A$

$$a = \frac{\frac{2}{3}(A^2 - x_{,}^2)^{\frac{3}{2}}}{2\int (A^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx}$$

$$a = \frac{\frac{1}{12}(\textit{corde segm. circ.})^3}{\textit{surface segm. circ.}}$$

$(A^2 - x_{,}^2)^{\frac{3}{2}}$ est le cube de la demi-corde de l'arc du segment circulaire, et $2\int (A^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx$, sa surface.

316. La distance du centre du cercle, au centre de gravité du secteur, renfermant le segment circulaire dont il vient d'être question, peut se trouver de deux manières : 1° en considérant ce secteur comme composé d'un segment et d'un triangle dont on connaît les centres particuliers de

gravité, et se conformant à ce qui est dit art. 283 et 285 : 2°. en observant que ce secteur est composé d'un infinité de triangles élémentaires égaux, dont les sommets sont au centre du cercle et les bases sur sa circonférence; le lieu géométrique des centres de gravité de ces triangles est, art. 311, sur un cercle concentrique à celui qui termine le secteur, de même valeur angulaire et compris entre les mêmes rayons que lui, et ayant son rayon particulier égal aux deux-tiers de celui du secteur. Le centre de gravité de cet arc, dont la position est connue par l'art. 309, est donc, art. 283, au même point que celui du secteur.

317. L'axe d'un cône droit étant pris pour axe des x, et le sommet du cône pour origine des x, l'équation de la génératrice du cône est $y=mx$, m étant une constante; on a, deplus, $ds=n\,dx$, n étant une autre constante; ces équations combinées avec la valeur de $a=\frac{\int xy\,ds}{\int y\,ds}$, données art. 296, pour la détermination des centres de gravité des surfaces de révolution, on aura, la distance du centre de gravité de la surface du cône, à son sommet, $=a=\frac{\int x^2\,dx}{\int x\,dx}$; c'est, art. 311, la même valeur à laquelle on parviendrait en cherchant le centre de gravité du triangle résulsant de la section plane du cône par son axe; donc le cône droit, le cône tronqué dont les bases sont perpendiculaires à l'axe, et le cylindre droit, qui est un cas du cône tronqué, ont leurs centres de gravité respectifs aux mêmes points où se trouvent placés les centres de gravité du triangle, du trapèze et du parallélogramme qu'on obtient en faisant, les coupes planes, de ces solides, par leurs axes.

318. Pour appliquer la formule $a=\frac{\int xy\,ds}{\int y\,ds}$ à la recherche de la position du centre de gravité d'une portion de surface sphérique, comprise entre deux plans parallèles, on fera $ds=\frac{r\,dx}{y}$, r étant le rayon de la sphère, et les x secomptant, à partir du centre, sur le diamètre perpendiculaire aux deux plans qui terminent la surface ou zone sphérique, lequel diamètre, art. 282, contient le centre de gravité de cette surface. La formule générale deviendra $a=\frac{\int x\,dx}{\int dx}=\frac{\frac{1}{2}x^2+C}{x+C'}$; si on suppose que les

plans qui terminent la surface, coupent l'axe des x aux points dont les abcisses sont $x_{,}$ et $x_{,,}$, on aura, en prenant les intégrales dans ces limites, $a=\frac{\frac{1}{2}(x_{,,}^2-x_{,}^2)}{x_{,,}-x_{,}}=\frac{1}{2}(x_{,,}+x_{,})$. Le centre de gravité est, sur l'axe des x, ou, sur le diamètre passant par les centres des cercles qui terminent la zone sphérique, au milieu de la distance entre ces deux cercles.

Ainsi le centre de gravité de la surface d'une calotte sphérique est au milieu de la flèche de cette calotte.

J'observe que ces résultats peuvent se déduire, avec la plus grande facilité, des rapports connus entre la surface de la sphère et la surface du cylindre circonscrit. On sait que deux zones des surfaces de ces solides, comprises entre des plans parallèles entr'eux et perpendiculaires à l'axe du cylindre, sont égales; et comme cette égalité, entre les zones totales, a aussi lieu entre les zones élémentaires, comprises entre deux plans perpendiculaires à l'axe et infiniment près l'un de l'autre, les centres de gravité des zones totales doivent être placées au même point sur l'axe, donc etc.

319. Le centre de gravité d'un polyèdre régulier, considéré comme un corps homogène, est, art. 282, au centre de la sphère, inscrite ou circonscrite; le centre de gravité d'un parallélipipède est, art. cité, à l'intersection des deux diagonales de la section parallélogrammique faite par un plan qui sépare le solide en deux parties égales et semblables.

En général, lorsqu'un solide pourra être coupé par trois plans dont chacun le divise en deux parties égales et semblables, placées symétriquement par rapport à ce plan, le centre de gravité sera au point commun de rencontre des trois lignes d'intersection de ces plans.

320. Une ligne droite, menée du sommet d'une pyramide au centre de gravité de sa base, doit passer par les centres de gravité de toutes les sections du solide, parallèles à cette base, puisque, art. 275 et 276, les centres de gravité de différents corps homogènes et semblables, sont semblablement placés dans ces corps. Le centre de gravité de la pyramide est donc, art. 284, un des points de la ligne droite ou axe dont je viens de parler. Prenons cet axe pour axe des x, en placant leur origine au sommet de la pyramide. La surface d'une section de ce solide parallèle à la base sera $=Kx^2$, K étant une constante, et, nommant ψ

l'angle formé par la base et par l'axe des x, $Kx^2\,dx \sin\psi$ sera la solidité d'une tranche élémentaire parallèle à la base. Le centre de gravité de cette tranche étant, comme on vient de le dire, placé au point où elle rencontre l'axe des x, on n'a besoin, d'après les art. 283 et 284, pour trouver le centre de gravité du solide entier, que de la première équation de l'art. 273, dans laquelle il faudra substituer $Kx^2\,dx \sin.\psi$, à m, $Kx^3\,dx \sin.\psi$, à mx, et l'équation deviendra, par cette substitution,

$$a = \frac{\int x^3\,dx}{\int x^2\,dx} = \frac{\frac{1}{4}x^4 + C}{\frac{1}{3}x^3 + C'}$$

le solide étant supposé terminé par deux plans parallèles à la base et coupant l'axe des x aux points dont les abcisses sont $x_{,}$ et $x_{,,}$, on a, en prenant les intégrales dans ces limites,

$$a = \frac{3}{4}\,\frac{x_{,,}^4 - x_{,}^4}{x_{,,}^3 - x_{,}^3}.$$

321. Cette formule, obtenue pour le cas de la pyramide tronquée, à bases parallèles, donne dans le cas de la pyramide entière, $a = \frac{3}{4}x_{,,}$, $x_{,}$, étant nul dans ce dernier cas; le centre de gravité du solide est, aux $\frac{3}{4}$ de la droite menée du sommet au centre de gravité de la base, en partant du sommet.

322. Les mêmes résultats sont immédiatement applicables au cône tronqué, dont les deux bases sont parallèles, et au cône entier à base quelconque.

323. Imaginons quatre masses égales dont chacune ait son centre de gravité placé à l'un des angles d'une pyramide à quatre faces; le centre de gravité commun des trois masses placées aux sommets des trois angles d'une des faces triangulaires, sera, art. 312, au centre de gravité de cette face, donc, art. 283, 284 et 285, le centre de gravité commun des quatres masses égales sera au quart de la distance entre le centre de gravité d'une des faces et le sommet de l'angle opposé à cette face; donc le centre de gravité commun de quatre masses égales, qui auraint leurs centres de gravité particuliers aux sommets des angles d'une pyramide à quatre faces, est placé au même point où se trouve le centre de gravité de la pyramide.

324. Pour faire une application de la formule de l'article 299, je place l'origine des coordonnées x, y, z, au centre d'un ellipsoïde dont

dont voici la génération : prenant, à partir de cette origine, sur les axes des x, y et z, des longueurs respectives m, $m_{\prime}$, $m_{\prime\prime}$, je trace deux ellipses, l'une dans le plan xy dont les demi-axes sont m et $m_{\prime}$, et qui a, pour équation $y_{\prime}^2=\frac{m_{\prime}^2}{m^2}(m^2-x^2)$; l'autre dans le plan xz, dont les demi-axes sont $m_{\prime\prime}$ et m, et qui a pour équation $z_{\prime}^2=\frac{m_{\prime\prime}^2}{m^2}(m^2-x^2)$; enfin je suppose que la coupe du solide, faite à l'extrémité de x, perpendiculairement à l'axe des x, est une ellipse, ayant pour demi-axes, les deux coordonnées correspondantes, $y_{\prime}$ et $z_{\prime}$, des ellipses tracées sur le plan xy et sur le plan xz, et par conséquent, pour équation $z^2=\frac{z_{\prime}^2}{y_{\prime}^2}(y_{\prime}^2-y^2)$, laquelle, en y substituant, pour $z_{\prime}^2$ et $y_{\prime}^2$, leurs valeurs ci-dessus, donne l'équation de la surface de l'ellipsoïde

$$m_{\prime\prime}^2\, m_{\prime}^2\, x^2+m_{\prime\prime}^2\, m^2 y^2+m_{\prime}^2\, m^2\, z^2=m^2\, m_{\prime}^2\, m_{\prime\prime}^2$$

Le centre de gravité de chacune des sections elliptiques de ce solide, faite perpendiculairement aux x, est, art. 282, au point de rencontre de cette section et de l'axe des x, point qui est le centre de la section elliptique ; le centre de gravité d'une portion du solide comprise entre deux plans parallèles aux yz est donc aussi, art. 284, sur l'axe des x. Soient, aux distances x et $x+dx$ de l'origine, deux sections faites par des plans parallèles aux yz, la surface d'une des sections sera . . . . $=\pi z_{\prime}^2.\frac{y_{\prime}}{z_{\prime}}=\pi y_{\prime} z_{\prime}=\frac{\pi m_{\prime} m_{\prime\prime}}{m^2}(m^2-x^2)$, (fonction qui représente $\phi(x)$, art. 299) et le volume du solide élémentaire qu'elles terminent sera $=\frac{\pi m_{\prime} m_{\prime\prime}}{m^2}(m^2-x^2)\,dx$. Le centre de gravité de ce solide est à son point de rencontre avec l'axe des x ; en substituant son volume à la place de $dx\phi(x)$, dans l'équation de l'art. 299, on aura la distance a du centre de gravité du solide fini à l'origine des x, qui sera

$$a=\frac{\int(m^2-x^2)\,x\,dx}{\int(m^2-x^2)\,dx}=\frac{\frac{1}{2}m^2x^2-\frac{1}{4}x^4+C}{m^2\,x-\frac{1}{3}x^3+C'}$$

Supposant que les plans parallèles aux yz, qui terminent le solide,

coupent l'axe des x à des distances x' et x'' de l'origine, la distance, à la même origine, du centre de gravité de ce solide, sera

$$a=\frac{3}{4}\cdot\frac{2m^2(x''^2-x'^2)-(x''^4-x'^4)}{3m^2(x''-x')-(x''^3-x'^3)}$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$a=\frac{3}{4}(x''+x')\left\{\frac{2m^2-x'^2-x''^2}{3m^2-x'^2-x'x''-x''^2}\right\}$$

325. Il est à remarquer que cette équation ne renferme pas les axes $m_{,}$ et $m_{,,}$ compris dans le plan perpendiculaire à x ou au demi-axe m; ces axes $m_{,}$ et $m_{,,}$ restent donc indéterminés, ensorte que la valeur de a sera la même pour tous les ellipsoïdes qui auront un demi-axe, dans le sens des x, égal à m (l'ellipsoïde de révolution et la sphère, doivent être comptés parmi ces solides); et si on fait $x_{,}=0$ et $x_{,,}=m$, on trouvera pour la distance du centre de gravité du demi-ellipsoïde au centre de cet ellipsoïde

$$a=\frac{3}{8}m$$

326. La distance A du sommet de l'ellipsoïde au centre de gravité d'un segment du solide, terminé par un plan perpendiculaire à l'axe et coupant cet axe à une distance ξ du sommet, sera d'après ce qui précède,

$$A=\left(\frac{8m-3\xi}{12m-4\xi}\right)\xi$$

on pourrait obtenir, immédiatement, ce résultat, en combinant, avec l'équation de l'art. 300, $a=\dfrac{\int xy^2\,dx}{\int y^2\,dx}$, l'équation $y^2=2mx-xx$ du cercle (l'origine des coordonnées est à l'extrémité du diamètre $2m$) d'après l'identité de position du centre de gravité du segment sphérique et des centres de gravité des segmets de tous les ellipsoïdes construits sur le grand axe $2m$, et ayant la même flèche ξ que le segment sphérique.

327. Pour avoir le centre de gravité d'un segment parabolique de révolution, substitué au segment ellipsoïdal, il suffit de faire $m=\infty$ dans la valeur de A donnée ci-dessus et on a

$$A=\frac{2}{3}\xi$$

328. Le secteur sphérique se compose d'un segment et d'un cône qui

ont une base commune, le sommet du cône étant au centre de la sphère; on connait art. 322 et 326 les positions des centres de gravité particuliers de ces deux solides, qui sont sur le rayon perpendiculaire à la base commune; on sait, de plus, art. 284, que leur centre de gravité commun doit être sur le même rayon, et on détermine, par la géométrie élémentaire, les volumes respectifs de ces deux solides; on peut donc, par la formule de l'art. 285, trouver la position du centre de gravité du secteur sphérique, dont la distance au sommet de la calotte, ou du segment sphérique, $=\frac{1}{8}(2m+3\xi)$, m étant le rayon de la sphère, et $m-\xi$ la distance de son centre au centre de la base commune du segment et du cône.

329. Enfin on trouvera, en combinant l'équation $a=\frac{\int xy^2\,dx}{\int y^2\,dx}$ avec l'équation de l'hyperbole $x=G(2mx+x^2)$, que le centre de gravité d'un segment hyperbolique de révolution, terminé par un plan perpendiculaire à l'axe des x, et rencontrant cet axe à l'extrémité de x, est à une distance du sommet $=\frac{8m+3x}{12m+4x}\,x$,

Cette expression se réduit sensiblement, à $\frac{3}{4}x$ lorsque x est très-grand par rapport à m, dans le cas contraire elle devient $=\frac{2}{3}x$, ainsi le centre de gravité du segment hyperbolique est toujours entre les $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$ de la flèche.

330. La règle de Guldin exposée, art. 301, et démontrée, art. 302 et 303, donne, avec la plus grande facilité, les expressions connues des surfaces et des solidités du cylindre, du cône, de la sphère, de l'ellipsoïde de révolution, etc. Veut-on l'appliquer à la mesure de la surface engendrée par un arc de cercle MM' tournant, autour du rayon AC, d'une quantité angulaire χ (*)? Il faut, d'abord, déterminer, sur le

Fig. 14

(*) L'angle décrit étant supposé d'un nombre de grades égal à θ, χ représente, dans les formules, la longueur absolue d'un arc ayant l'unité linéaire pour rayon, et dont le rapport à la circonférence entière, décrite du même rayon, est celui de θ : 400. On trouve ces arcs tout calculés, dans les tables de logarithmes de CALLET. Ce que je viens de dire du signe χ, s'applique, en général, aux lettres par lesquelles on désigne des angles dans les expressions analytiques.

rayon Aq, qui partage cet arc en deux parties égales, la position G de son centre de gravité, dont, art. 309, la distance AG au centre du cercle $= \frac{corde\ MM'}{arc\ MM'} \times Aq$. La dist^{ce} Gp, du même centre de gravité au rayon AC, a pour valeur $AG \times \sin. GAp = AG \times \sin. M'M\mu = AG \times \frac{M'\mu}{corde\ MM'} = Aq \times \frac{M'\mu}{arc\ MM'}$, $M'\mu$ étant une parallèle à AC; ainsi la surface cherchée $= \chi \times Gp \times arc\ MM' = \chi \times Aq \times M'\mu = \chi \times Pm \times mm'$, Bmm' et PMm étant, respectivement, parallèle et perpendiculaire au rayon AC. On retrouve la propriété connue de l'égalité entre les zones sphériques et les zones cylindriques, comprises entre des plans perpendiculaires à l'axe du cylindre.

331. CNB' étant un quart d'ellipse construit sur les demi-axes $AC=m$ et $AB'=n$, cherchons le volume du solide engendré par l'aire $PNN'P'$, comprise entre deux parallèles PN et $P'N'$ à AB', lorsque cette aire décrit un angle χ en tournant autour du demi-axe AC. Comptant les x sur AC et prenant leur origine au point A, on a l'équation $y^2 = \frac{n^2}{m^2}(m^2 - x^2)$ et cette équation combinée avec la 2e. équation de l'art. 297, dans l'hypothèse de $y'=0$, donne, pour la distance, au demi-axe AC, du centre de gravité de $PNN'P'$, $b = \frac{1}{2} \cdot \frac{n^2 \int (m^2 - x^2)dx}{m^2 \int y\, dx}$ d'où on conclut la valeur de la solidité cherchée, $b\chi\int y\, dx = \frac{\chi n^2}{m^2}(m^2 x - \frac{1}{3}x^3) + C$, valeur qui, en faisant $AP = x_{,}$ et $AP' = x_{,,}$ devient $b\chi\int y\, dx = \frac{\chi n^2}{2m^2}\{m^2(x_{,,} - x_{,}) - \frac{1}{3}(x_{,,}^3 - x_{,}^3)\} = \frac{\chi n^2}{6m^2}(x_{,,} - x_{,})\{3m^2 - x_{,,}^2 - x_{,,}x_{,} - x_{,}^2\}$.

Si l'angle $\chi =$ une circonférence $= 2\pi$ et que la surface génératrice soit un quart d'ellipse, on a $x_{,}=0$, $x_{,,}=m$, et le volume du demi-ellipsoïde de révolution a pour valeur, $\frac{2}{3}\pi m n^2$; le volume de l'ellipsoïde entier $= \frac{4}{3}\pi m n^2$.

332. OR étant un axe vertical situé dans le plan du quart d'ellipse ACB', et parallèle au demi-axe AB', supposons que le demi-segment

elliptique NCP tourne autour de OR en décrivant un angle ψ; l'arc de courbe $CN'N$ engendrera, dans ce mouvement, la *douelle* d'une espèce de voûte qu'on nomme *voûte en encorbellement ;* le vide compris entre sa *douelle*, la surface cylindrique qu'engendre l'ordonnée NP, et le plan horisontal passant par la naissance C, sera égal au produit de l'aire $CN'NPC$ par la distance du centre de gravité de cette aire à l'axe OR et par l'angle ψ; or en observant que, d'après l'art. 283, le centre de gravité de l'aire du segment elliptique entier qui serait terminé par l'ordonnée NP, prolongée jusqu'à l'autre branche de l'ellipse, et les centres de gravité particuliers de chacun des demi-segments, (séparés par le demi-axe CA) qui le composent, doivent être sur une même parallèle à AB ou, à OR, on trouvera en reprenant les valeurs données, art. 315, et observant que $K=\frac{n}{m}$, le volume du solide dont on cherche la cubature, égal à

$$\chi\left\{\tfrac{2}{3}\frac{m^2}{n^2}\times PN^3+\text{aire } CN'NPC\times AO\right\}$$

333. La voûte en *encorbellement* pourrait être *rampante*, et pour concevoir la génération de cette espèce de voûte il faut supposer que pendant la rotation du plan ROC autour de l'axe vertical OR, l'aire $CN'NPC$ s'abaisse, dans ce plan, avec les conditions que la distance PO et le parallélisme de PN et de OR demeurent invariables, et que, de plus, l'espace parcouru par AC, au-dessous de sa position initiale, est, à chaque instant, proportionnel à l'angle décrit depuis le commencement du mouvement jusqu'à ce même instant.

Il est aisé de s'assurer que le *vide* de la voûte, dans ce dernier cas, est égal au *vide* de la voûte *droite*; qu'on imagine une tranche élémentaire de l'un et l'autre solide, comprise entre deux plans passants par l'axe OR et formant entr'eux, un angle infiniment petit, un autre plan perpendiculaire à l'un de ceux dont je viens de parler, et parallèle à OR, formerait, dans les tranches élémentaires, deux sections parallélogrammiques de même base finie, et de même hauteur infiniment petite ; les volumes de ces tranches élémentaires sont donc égaux entr'eux, d'où il résulte l'égalité des solides finis qui se composent de leur somme.

334. Les résultats, auxquels je viens de parvenir, s'appliquent immédiatement à la cubature de la voûte *annulaire*, tant *droite* que *ram-*

pante, dont la *douelle* est engendrée par le mouvement d'une demi-ellipse. On peut, aussi, tirer parti de ce qui est dit, dans l'art. précédent, pour généraliser encore le théorême de Guldin, en faisant entrer en considération les mouvements particuliers de translation que peuvent prendre les aires génératrices, dans les plans avec lesquels elles ont un mouvement commun de rotation.

Quelques observations relatives à l'action des forces sur les systêmes *étendus* et *figurés*.

335. Chacune des diverses parties de la théorie de l'équilibre, démontrées jusqu'à présent dans ce traité, est liée à un problême fondamental, dans lequel on considère l'action de deux forces, dirigées dans un même plan, et où on se propose de trouver, soit la résultante de ces deux forces, soit la force qui peut leur faire équilibre, après s'être assuré que cette dernière force doit agir dans le même plan qui renferme les directions des deux autres; et on a vu que les équations d'équilibre, déduites de la solution de ce problême fondamental, ne sont autre chose que des *équations de condition* qui, lorsqu'elles sont satisfaites, donnent la certitude que les forces peuvent se réduire à une ou plusieurs couples de forces égales et *directement opposées*.

J'ai, ainsi, établi les conditions de l'équilibre des forces quelques soient leur nombre, leurs intensités et leurs directions, lorsqu'elles concourent en un point commun, lorsqu'elles agissent dans un même plan, et, si on les suppose parallèles, lorsqu'elles sont appliquées à un systême de forme quelconque invariable. Tous ces résultats sont liés rigoureusement au premier raisonnement par lequel on prouve que deux forces dirigées dans un même plan, ont leur résultante dans ce même plan.

Les mêmes bases de démonstration me suffiront pour compléter la théorie entière de la statique, car je ramènerai toujours la détermination des conditions d'équilibre des forces, pour tous les cas possibles de leur mode d'action, à celle des conditions d'équilibre applicables aux cas où les actions son dirigées dans un même plan; et, pour faciliter et abréger la marche de l'analyse, je vais, d'abord, présenter quelques considérations générales sur l'action des forces appliquées à des systêmes d'espèces quelconques, et examiner quelques combinaisons de ces forces qui rendent leur équilibre impossible.

336. Une force unique appliquée, soit à un système libre, soit à un système qui a un axe ou un point fixe, sans être dirigée sur cet axe, ou ce point, doit nécessairement mettre le système en mouvement; la proposition est manifeste, dans le cas du système libre; nous avons établi, en posant les premiers principes de la science de l'équilibre, que les *systêmes* étaient, d'une manière purement passive, des moyens de transmission des actions des forces, et que l'équilibre d'un systême, auquel des forces sont appliquées, exige qu'il y en ait aumoins deux agissant sur lui. Dans l'hypothèse d'un point ou d'un axe fixe, le systême étant supposé de forme invariable, le point d'application de la force unique se trouve réduit à l'état d'un point *isolé*, assujetti à se mouvoir sur une surface sphérique, ou une surface cylindrique, et alors, d'après ce qui a été démontré, art. 90 et suivants, il est nécessaire, pour l'équilibre, que la force soit dirigée sur le point ou l'axe fixe.

337. Un systême *libre*, d'une espèce quelconque, étant supposé en équilibre, cet équilibre doit encore subsister si on rend fixes, un nombre, absolument arbitraire, des points d'application des forces; en effet, chacune des forces dont le point d'application n'a pas été rendu immobile, éprouvera, par la résistance des points immobiles, précisément les mêmes réactions qu'elle éprouvait de la part des forces appliquées à ces points avant qu'on les fixât. Il n'y aura donc rien de changé à l'état des points qui restent mobiles; leur équilibre, les intensités, les directions et les sens d'actions des pressions qu'ils éprouveront, devront être les mêmes qu'auparavant.

338. Lorsqu'on a ainsi rendu fixe, dans un corps, ou un point, ou un axe, si les autres forces peuvent imprimer du mouvement à leurs points d'applications, c'est-à-dire si l'équilibre n'existe pas dans le systême dont un ou plusieurs points sont devenus immobiles, on doit en conclure qu'il n'existait pas auparavant; en effet, si l'équilibre avait eu lieu, les actions des forces appliquées aux points qui sont encore mobiles, auraient été contrebalancées par les actions des forces appliquées aux points rendus fixes; or les résistances de ces derniers points, quand ils sont devenus immobiles, remplacent, identiquement, les effets que les forces qui y étaient appliquées exerçaient contre les autres forces, il est donc manifeste que, si ces résistances ne peuvent pas empêcher le mouvement du systême, les forces qu'elles représentent ne le pouvaient pas d'avantage.

339. L'inverse de cette proposition n'a pas lieu, c'est-à-dire qu'on ne devrait pas conclure de ce que l'équilibre existerait après qu'on aurait rendu un point ou un axe immobiles, que cet équilibre eut existé avant; il est évident que ce point, ou cet axe, en annullant les effets de certaines forces, peut être placé de manière à opposer des résistances qui contre-balancent les actions combinées de toutes les autres forces; et la détermination des positions qu'on doit lui donner, pour remplir cette condition, tient à des questions dont je parlerai bientot.

340. On conclut immédiatement, de ce qui est dit art. 338, que deux forces P et Q, appliquées à un corps *libre*, et dont les directions ne se rencontrent pas ne peuvent jamais se faire équilibre, car en traversant ce corps par un axe fixe perpendiculaire à la direction de P, et rencontrant la direction de Q, le point d'application de P tournera necessairement, art. 336, autour de cet axe.

Si l'axe perpendiculaire à la direction de la force P se trouvait parallèle à la direction de la force Q, l'effet de cette dernière n'en serait pas moins annullé puisqu'elle agirait dans un plan renfermant un axe fixe.

341. L'équilibre est encore impossible entre trois forces P, Q et R, appliquées à un même corps *libre*, et dont les trois directions ne peuvent pas avoir leurs traces dans un même plan; pour s'en assurer aisément, par le théorême de l'art. 338, qu'on fasse passer par les directions de deux des forces, celles de P et R, par exemple, des plans, que je désignerai respectivement, par plan π et plan ρ, parallèles à la direction de Q; on pourra toujours mener, par la direction de cette dernière force, un 3e. plan qui rencontre, π, ρ, et au moins une des directions de P et de R que je suppose être celle de P; décomposant ensuite Q en deux forces dirigées suivant les lignes d'intersections du 3e. plan avec π et ρ, une des composantes pourra, par hypothèse, se composer à son tour, avec P, en une seule force que j'appelle Π, et imaginant, dans le plan ρ, un axe fixe, perpendiculaire à la direction de Π, le mouvement de rotation aura necessairement lieu autour de cet axe; donc etc.

Il est bon d'observer que dans le cas où la composition des forces, dans le plan π, donnerait une résultante nulle, la résultante des deux forces agissant dans le plan ρ resterait seule, et ne pourrait être nulle, elle même, qu'autant que P, Q et R agiraient dans un même plan, en satisfaisant d'ailleurs, aux conditions de l'équilibre.

Je

Je ne donne les propositions, démontrées dans cet article et dans le précédent, que comme des exemples de l'application du théorème de l'art. 338, dont j'aurai bientôt occasion de faire un usage important, car il n'était pas nécessaire de rien ajouter à tout ce que j'ai dit ailleurs, pour être en état d'affirmer que deux forces ne se font équilibre qu'autant qu'elles sont égales et *directement* opposées, et que la première condition de l'équilibre, entre trois forces, est que ces forces soient dirigées dans le même plan.

Conditions de l'équilibre d'un système ou d'un corps *libre*, de forme invariable, sollicité par des forces quelconques.

342. Je continuerai à rapporter les positions de tous les points du corps ou du système, aux trois axes coordonnés des x, y et z; j'appellerai P', P'' etc. les forces appliquées aux points dont les coordonnées respectives sont x', y', z'; x'', y'', z''; etc., et je désignerai les angles que la direction d'une force $P^{(n)}$, ((n) étant le numero de son accent) fait avec les axes, des x, des y et des z, par $\alpha^{(n)}$, $6^{(n)}$, $\gamma^{(n)}$.

Cette notation établie, je puis donner les expressions des composantes rectangulaires des forces P, par rapport à des lignes de positions déterminées dans l'espace; la valeur la plus générale d'une quantité de cette espèce, est celle des composantes de P, parallèle et perpendiculaire à une ligne que je désigne par ligne λ, et dont les angles respectifs avec les axes des x, y et z sont A, B et C. La première composante ou le produit de P, par le cosinus de l'angle que fait cette force avec la ligne λ, est égale à

$$P\,\{\cos.\alpha\cos.A+\cos.6\cos.B+\cos.\gamma\cos.C\}$$

ou à la somme des composantes $P\cos.\alpha$, $P\cos.6$, $P\cos.\gamma$, parallèles aux axes coordonnés, décomposées elles mêmes, parallèlement à la ligne λ. Cette formule, rapprochée de celles des art. 168 et 169, rappelle ce que j'ai fait observer, art. 173, sur l'analogie qui existe entre la composition et la décomposition des forces et des opérations de même espèce, faites sur les moments.

La seconde composante, égale au produit de la force P par le sinus de l'angle qu'elle forme avec la ligne λ, a pour valeur

$$P\,\{1-(\cos.\alpha\cos.A+\cos.6\cos.B+\cos.\gamma\cos.C)^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

et si on connaît les moments respectifs l, m, n, de P, par rapport aux axes des x, y et z, et la plus courte distance ρ, entre la direction de P et la ligne λ, la valeur de cette composante pourra, art. 168, se mettre sous la forme $(l \cos. A + m \cos. B + n \cos. C) : \rho$.

343. Si on veut décomposer la force P en trois composantes rectangulaires, dont l'une soit parallèle à la ligne λ, les deux autres, qu'on suppose former un angle droit entr'elles, étant dirigées dans un plan perpendiculaire à λ, la direction, dans ce plan, d'une de ces dernières forces, sera arbitraire, si elle n'est pas donnée par l'état de la question; désignant par A', B', C', et par A'', B'', C'', les angles respectifs que font ces deux composantes avec les axes des x, y, et z, la valeur de la composante parallèle à λ, donnée dans l'art. précédent, ne changera pas, et les valeurs des deux autres composantes, seront :

$$P(\cos. \alpha \cos. A' + \cos. 6 \cos. B' + \cos. \gamma \cos. C')$$
$$P(\cos. \alpha \cos. A'' + \cos. 6 \cos. B'' + \cos. \gamma \cos. C'')$$

Il existe, entre les angles qui entrent dans ces formules, plusieurs relations connues exprimées par des équations.

344. Je passe à la recherche des conditions de l'équilibre entre les forces P', P'', etc. appliquées à un système de forme quelconque invariable; pour y arriver, de la manière la plus simple, je réduis, par le théorème de l'art. 56, P', P'', etc., à trois groupes de forces parallèles, l'un formé des composantes $P' \cos. \alpha'$, $P'' \cos. \alpha''$, etc. parallèles à l'axe des x, et les deux autres formés des composantes $P' \cos. 6'$, $P'' \cos. 6''$, etc., $P' \cos. \gamma'$, $P'' \cos. \gamma''$, etc. respectivement parallèles aux axes des y et des z. La force $P' \cos. \alpha'$ rencontre le plan yz en un point que je désigne par ω, dont les coordonnées sont y' et z'; je prends sur les axes des y et des z, à partir de l'origine, les longueurs respectives $2y'$ et $2z'$ et ω se trouve au milieu de la droite qui joint les extrémités de ces longueurs; je décompose ensuite, $P' \cos. \alpha'$ en deux forces appliquées aux mêmes extrémités, et perpendiculaires au plan yz; ces composantes sont, art. 220, égales, chacune, à $\frac{1}{2} P' \cos \alpha'$, et agissent, la première dans le plan xy, perpendiculairement à l'axe des y à une distance $2y'$ de l'axe des x, l'autre dans le plan xz, perpendiculairement à l'axe des z, à une distance $2z'$ de l'axe des x.

On peut ainsi décomposer le groupe des forces $P' \cos. \alpha'$, $P'' \cos. \alpha''$, etc., en deux groupes de forces $\frac{1}{2} P' \cos. \alpha'$, $\frac{1}{2} P'' \cos. \alpha''$, etc., agissants

parallèlement aux x, l'un dans le plan xy, l'autre dans le plan xz, aux distances respectives $2y'$, $2y''$, etc. $2z'$, $2z''$, etc. de l'axe des x.

Pareillement on décomposera le groupe des forces $P' \cos. 6'$, $P'' \cos. 6''$; etc., en deux groupes de forces $\frac{1}{2} P' \cos. 6'$, $\frac{1}{2} P'' \cos. 6''$, etc., agissants, parallèlement aux y, l'un dans le plan xy, l'autre dans le plan yz, aux distances respectives $2x'$, $2x''$, etc. $2z'$, $2z''$, etc. de l'axe des y;

Et le groupe des forces $P' \cos. \gamma'$, $P'' \cos. \gamma''$, etc. en deux groupes de forces $\frac{1}{2} P' \cos. \gamma'$, $\frac{1}{2} P'' \cos. \gamma''$, agissants, parallèlement aux z, l'un dans le plan xz, l'autre dans le plan yz, aux distances respectives $2x'$, $2x''$, etc. $2y'$, $2y''$, etc. de l'axe des z.

Toutes les forces, qui agissent sur le système, dans des plans et dans des directions quelconques, seront donc remplacées, ultérieurement, par des forces, agissants dans les trois plans coordonnés seulement, et partagées, sur chacun de ces plans, en deux groupes de forces respectivement parallèles aux axes que renferment ces plans.

345. Il est évident, d'après cette disposition, que si l'équilibre a lieu sur chacun des plans coordonnés, il aura lieu dans le système entier, et les conditions de cet équilibre sont, art. 141, exprimées, sur les plans des xy, xz et yz, par les équations respectives

$$\tfrac{1}{2}\Sigma(P\cos. \alpha)=0;\ \tfrac{1}{2}\Sigma(P\cos. 6)=0;\ \tfrac{1}{2}\Sigma\{P(2y\cos. \alpha-2x\cos. 6)\}=0$$
$$\tfrac{1}{2}\Sigma(P\cos. \alpha)=0;\ \tfrac{1}{2}\Sigma(P\cos. \gamma)=0;\ \tfrac{1}{2}\Sigma\{P(2x\cos. \gamma-2z\cos. \alpha)\}=0$$
$$\tfrac{1}{2}\Sigma(P\cos. 6)=0;\ \tfrac{1}{2}\Sigma(P\cos. \gamma)=0;\ \tfrac{1}{2}\Sigma\{P(2z\cos. 6-2y\cos. \gamma)\}=0$$

il faut se rappeler que l'équilibre ne saurait avoir lieu, pour l'un quelconque de ces plans, si les trois équations, qui s'y rapportent, n'étaient pas satisfaites, chacune en particulier, puisque, art. 142, une seule de ces équations, qui n'aurait pas lieu, indiquerait que les forces, agissant dans ce plan, ne peuvent pas se réduire à deux forces égales et *directement* opposées.

346. Ces neuf équations n'en forment réellement que six différentes entr'elles; ainsi l'équilibre du système sera assuré, lorsqu'on aura entre les forces, les angles qu'elles font avec les axes, et les coordonnées de leurs points d'application, les équations

$$(a) \ldots\ \Sigma(P\cos. \alpha)=0;\ \Sigma(P\cos. 6)=0;\ \Sigma(P\cos. \gamma)=0$$

$$(b) \ldots \begin{cases} \Sigma\{P(y\cos. \alpha-x\cos. 6)\}=0; \\ \Sigma\{P(x\cos. \gamma-z\cos. \alpha)\}=0; \\ \Sigma\{P(z\cos. 6-y\cos. \gamma)\}=0; \end{cases}$$

qui expriment l'égalité à zéro. 1° de chacune des trois sommes des composantes, prises parallèlement aux axes coordonnés; 2° de chacune des trois sommes des moments par rapport aux mêmes axes.

347. Non-seulement ces équations assurent l'équilibre, lorsqu'elles ont lieu, comme je viens de le démontrer, mais il faut encore qu'elles soient toutes satisfaites, pour que cet équilibre existe, et c'est ce dont on s'assure, très-aisément, par le théorême de l'art. 338; en effet, il y aurait, nécessairement, sur chacun des plans coordonnés, pour lequel les équations de l'art. 345, relatives à ce plan, ne seraient pas toutes satisfaites, une force libre; si les trois plans coordonnés se trouvaient dans ce cas, où toutes les forces, agissant dans ces plans, seraient dirigées sur l'origine des coordonnées et pourraient se composer en une seule résultante, qui, art. 336, mettrait, nécessairement, le système en mouvement, où l'une au moins, de ces forces, ne passerait pas par l'origine, et alors, rendant fixe l'axe coordonné perpendiculaire au plan qui renfermerait la direction de cette force, les actions de celles qui auraient leurs directions sur les deux autres plans coordonnés, seraient annullées, et il est manifeste que le système tournerait autour de l'axe rendu fixe, soit en vertu de la force unique, soit en vertu de la couple existant sur le plan perpendiculaire à cet axe.

Si les équations d'équilibre étaient satisfaites sur un des plan coordonés sans l'être sur les deux autres, les forces ou les couples, agissant dans ces deux derniers plans, ou se composeraient en une seule force, ou fourniraient deux forces dont les directions ne se rencontreraient pas, et, dans l'un et l'autre cas, art. 336 et 340, l'équilibre serait impossible.

Enfin si les équations d'équilibre étaient satisfaites sur deux des plans coordonnés, sans l'être sur le 3e, la force, ou la couple, agissant dans ce 3e plan, mettrait nécessairement le système en mouvement.

Ainsi il est indispensable, pour l'équilibre, que la totalité des équations, posées art. 345 et 346, soit satisfaite. (*)

(*) J'ai supposé, dans les démonstrations qui occupent les art. 344, 345, 346 et 347, et qui me paraissent nouvelles, que les composantes des forces $P \cos. \alpha$, agissant parallèlement aux x, dans les plans des xy et des xz, étaient prises de manière à être égales entr'elles et à $\frac{1}{2} P \cos. \alpha$, et qu'on obtenait, par un mode pareil de décomposition, des forces $\frac{1}{2} P \cos. \beta$, $\frac{1}{2} P \cos. \gamma$, agissant parallèlement aux y et aux z, dans les plans des xy, des yz, et

348. D'après ce qui a été dit, art. 141 et 142, et d'après la marche de raisonnement qui m'a conduit aux équations de l'art. 346, on voit clairement à quoi se réduisent, ultérieurement, les conditions énoncées par ces équations ; elles expriment que des forces en équilibre, sur un système de forme invariable, peuvent se réduire à trois couples de forces égales et *directement* opposées, chacune de ces couples se trouvant placée sur un des plans coordonnés. Il est manifeste que lorsqu'on a vérifié cette destruction de forces pour une certaine position des plans coordonnés elle doit se retrouver, dans toutes les transformations qu'on peut faire des axes sur lesquels ces plans se coupent ; car, s'il en était autrement, on pourrait remplacer les forces en équilibre, immédiatement appliquées au système, par des forces agissant dans des plans coordonnés, situés de

---

des xz. Cette hypothèse simplifie les raisonnements, mais je serais également parvenu aux équations de l'art. 346, en établissant entre les forces transportées sur les plans coordonnés, parallèles à un même axe et provenant d'une même force P cos. α, P cos. β, ou P cos. γ, prise dans l'espace, un rapport quelconque égal à celui de deux nombres arbitraires m et n. Voici, en peu de mots, comment on s'en assure : prenant sur les axes des z et des y, respectivement, des points dont les distances à l'origine soient $z\left(1+\frac{n}{m}\right)$ et $y\left(1+\frac{m}{n}\right)$, on pourra remplacer la force P cos. α en appliquant à ces points, des forces parallèles aux x, savoir : $\frac{Pm \text{ cos. } \alpha}{m+n}$, agissant dans le plan xz, $\frac{Pn \text{ cos. } \alpha}{m+n}$, agissant dans le plan xy. Prenant ensuite sur les axes des z et des x, respectivement, des points dont les distances à l'origine soient $z\left(1+\frac{n}{m}\right)$ et $x\left(1+\frac{m}{n}\right)$, on pourra remplacer P cos. β en appliquant à ces points des forces parallèles aux y, savoir : $\frac{Pn \text{ cos. } \beta}{n+m}$, dans le plan xy, et $\frac{Pm \text{ cos. } \beta}{n+m}$ dans le plan yz. Enfin, appliquant à des points pris sur les axes des y et des x, aux distances respectives de l'origine $y\left(1+\frac{n}{m}\right)$ et $x\left(1+\frac{m}{n}\right)$, les forces parallèles aux z, $\frac{Pm \text{ cos. } \gamma}{m+n}$ dans le plan yz, et $\frac{Pn \text{ cos. } \gamma}{m+n}$ dans le plan xz, ces forces remplaceront P cos. γ.

Posant entre les forces, ainsi transportées sur les plans coordonnés, les équations d'équilibre correspondantes à celles de l'art. 345, les arbitraires m et n, s'élimineront d'elles mêmes et on obtiendra les équations de l'art. 346.

manière que le groupe de forces agissant dans chacun de ces plans, ne serait pas en équilibre par lui-même ; mais j'ai démontré, qu'alors, l'équilibre du système serait impossible, ainsi cet équilibre existerait et n'existerait pas, donc, etc.

340. L'évidence de cette conclusion tient particulièrement à la marche que j'ai suivie dans les preuves des propositions directes et inverses, relatives à l'équilibre d'un système; mais si on voulait démontrer immédiatement, que, lorsque les équations d'équilibre ont lieu par rapport à des plans coordonnés de positions déterminées, elles ont aussi lieu pour d'autres plans coordonnés, placés arbitrairement dans l'espace, les théorèmes des art. 171, 179 et 342 fourniraient le moyen d'arriver très-promptement à la démonstration cherchée, qui, sans le secours de ces théorèmes, serait compliquée.

Pour prouver d'abord que des équations de la force $\Sigma (P \cos. \alpha) = 0$, $\Sigma (P \cos. \beta) = 0$, $\Sigma (P \cos. \gamma) = 0$, ont lieu par rapport à tout système de plans coordonnés, autre que celui sur lequel elles ont été vérifiées en premier lieu, je suppose que ces nouveaux axes des x, y et z fassent, chacun en particulier, avec les anciens axes des x, y et z, les angles respectifs A, B, C; A', B', C'; A'', B'', C''; on aura les sommes des composantes, parallèles aux nouveaux axes, en substituant, dans les expressions des art. 342 et 343, $\Sigma (P \cos. \alpha)$, $\Sigma (P \cos. \beta)$, $\Sigma (P \cos. \gamma)$, à $P \cos. \alpha$, $P \cos. \beta$, $P \cos. \gamma$, et on voit que ces expressions seront, chacune en particulier, égale à zéro, puisque, par l'état de la question, on a $\Sigma (P \cos. \alpha) = 0$, $\Sigma (P \cos. \beta) = 0$, $\Sigma (P \cos. \gamma) = 0$.

Passant aux équations des moments, qui sont $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 0$, si on désigne par λ, μ et ν les sommes respectives des moments par rapport aux axes des x, y et z, je nomme a, b, et c, les coordonnées de la nouvelle origine, respectivement parallèles aux x, y et z primitives et j'observe que si les nouveaux axes étaient parallèles aux anciens, les nouvelles sommes des moments, dont les valeurs ont été données art. 179, seraient nulles, puisque, par hypothèse, on a $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 0$; $X = \Sigma (P \cos. \alpha) = 0$, $Y = \Sigma (P \cos. \beta) = 0$, $Z = \Sigma (P \cos. \gamma) = 0$; mais, art. 171, la somme des carrés des moments est constante pour tous les systèmes des axes coordonnés qui se coupent en un même point. On a donc, en désignant, par $L_{,}$, $M_{,}$, $N_{,}$, les moments respectifs, par rapport à trois axes rectangulaires, dont le point d'intersection a pour

coordonnées, a, b et c, et qui sont, d'ailleurs, situés d'une manière quelconque, et conservant à L, M, N la signification qui leurs a été donnée art. 169; $L^2 + M^2 + N^2 = L_{,}^2 + M_{,}^2 + N_{,}^2$; d'où on conclut $L_{,}^2 + M_{,}^2 + N_{,}^2 = 0$, puisqu'on a, par hypothèse, $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$; or les carrés $L_{,}^2$, $M_{,}^2$, $N_{,}^2$ étant des quantités essentiellement positives, leur somme ne peut pas être zéro, sans que chacun d'eux ne le soit, en particulier, d'où $L_{,} = 0$, $M_{,} = 0$, $N_{,} = 0$. C. Q. F. D.

350. Les équations $\Sigma(P\cos.\alpha) = 0$, $\Sigma(P\cos.6) = 0$, $\Sigma(P\cos.\gamma) = 0$, sont, art. 72, les mêmes qu'on aurait pour exprimer les conditions de l'équilibre des forces, si ces forces étaient toutes appliquées, à l'origine des coordonnées, parallèlement aux directions qu'elles ont à leurs points effectifs d'applications; d'un autre part, d'après ce qui est démontré dans l'article précédent, des équations, de même forme, existent entre les forces et leurs directions, quelque soit le point de l'espace qu'on prenne pour origine des coordonnées; des forces en équilibre sur un système *libre*, de forme quelconque invariable, seraient donc encore en équilibre, si, conservant leurs intensités, leurs sens d'action, et les angles qu'elles font avec les axes coordonnés, on les appliquait toutes à un même point, pris arbitrairement dans l'espace.

Composition des forces appliquées à un système de forme quelconque. Équation de condition qui doit être satisfaite pour que ces forces aient une résultante unique.

351. Les forces appliquées au système, suivant des directions quelconques, se trouvent, lorsqu'elles ont subi les décompositions expliquées art. 344, remplacées par des groupes de forces qui ont leurs directions dans les plans coordonnés; si le système n'est pas en équilibre chacun des groupes de forces, dont je viens de parler, pourra se composer en une résultante ou en une couple; supposons qu'on ait des résultantes non-accouplées, désignées par $R_{,}$, sur le plan xy, par $R_{,,}$, sur le plan xz, et par $R_{,,,}$ sur le plan yz; représentant par λ, μ et ν, respectivement, les sommes des moments des forces par rapport aux axes des x des y et des z, et faisant $\Sigma(P\cos.\alpha) = X$, $\Sigma(P\cos.6) = Y$, et $\Sigma(P\cos.\gamma) = Z$, les valeurs et les directions de $R_{,}$, $R_{,,}$, et $R_{,,,}$, se détermineront, art. 139, par les équations

$$R_{,}=\pm(X^2+Y^2)^{\frac{1}{2}};\ R_{,,}=\pm(X^2+Z^2)^{\frac{1}{2}};\ R_{,,,}=\pm(Y^2+Z^2)^{\frac{1}{2}}\ \ldots\ldots (A)$$

$$\nu-(Xy-Yx)=0\,;\mu-(Zx-Xz)=0\,;\lambda-(Yz-Zy)=0\ldots(B)$$

352. Ces trois forces $R_{,}$, $R_{,,}$, $R_{,,,}$, agissant dans les plans coordonnés, peuvent toujours être réduites à deux, soit par le moyen indiqué art. 341, soit par d'autres procédés et le problème de cette composition est en général indéterminé; mais il y a, aussi, une infinité de cas qui donnent une résultante unique et qu'il est important de reconnaître par les relations particulières, qui existent, alors, entre les données du problème; pour trouver ces relations, j'observe que si cette résultante unique, que je désigne par R, existe, elle doit être capable, ou de remplacer toutes les forces du système, ou de leur faire équilibre, suivant le sens dans lequel elle agit. Ainsi en lui donnant le sens d'action convenable, les trois sommes de ses composantes et de celles de toutes les forces, prises parallèlement à chaque axe, doivent être, séparément, égales à zéro, et les sommes de ses moments et de ceux de toutes les forces, doivent aussi être nulles, par rapport à chaque axe en particulier, puisque les équations d'équilibre de l'art. 346 ne sont que l'énonciation de ces diverses conditions; nommant donc, α, β et γ, les angles respectifs formés par les directions de R et par les axes, des x des y et des z, faisant $\Sigma(P\cos.\alpha)=X$, $\Sigma(P\cos.\beta)=Y$, $\Sigma(P\cos.\gamma)=Z$, et désignant par λ, μ et ν, respectivement, les sommes des moments des forces P, par rapport aux axes des x, y et z, les équations d'équilibre de l'article 346 deviennent

$$(A')\ldots X-R\cos.\alpha=0;\ Y-R\cos.\beta=0;\ Z-R\cos.\gamma=0$$

$$(B)\ldots \lambda-(Yz-Zy)=0;\ \mu-(Zx-Xz)=0;\ \nu-(Xy-Yx)=0$$

les trois dernières qui appartiennent aux moments, et qui sont, en même temps, les équations des projections de la ligne de direction de R sur les plans coordonnés, se trouvent identiques avec les équations (B), des directions de $R_{,}$, $R_{,,}$, $R_{,,,}$, données, art. 351; ces dernières directions sont donc les projections orthogonales de celle de R sur les plans coordonnés, et si, comme on le suppose, toutes les forces du système (que $R_{,}$, $R_{,,}$ et $R_{,,,}$ peuvent représenter) ont réellement, pour résultante unique, la force R, les équations des directions de $R_{,}$, $R_{,,}$, $R_{,,,}$, sur les plans coordonnés, qui, dans ce cas, sont, comme on vient de le voir, les

les équations de la direction de cette résultante unique, dans l'espace, doivent satisfaire aux conditions d'après lesquelles trois équations entre x, y et z appartiennent à une même droite; la recherche qui nous occupe, se trouve donc réduite à des considérations de pure géométrie.

Les conditions dont je viens de parler, consistent dans une certaine relation entre les constantes des équations (B), qu'on trouve aisément, en les ajoutant, après avoir multiplié par X, celle qui contient λ, par Y, celle qui contient μ, et par Z, celle qui contient ν; les termes variables disparaissent de la somme, et on a, entre les quantités connues, l'équation unique

$$\lambda X+\mu Y+\nu Z=0 \;\ldots\ldots\; (C)$$

que j'ai donnée, le premier, et qui se trouve dans le *plan raisonné* de mon cours (*) publié an l'an IX (1800); Mr. Poinsot l'a ensuite, déduit de sa théorie des *couples*; voyez le traité de statique qu'il a fait imprimer en l'an XII, (1803), et le tome 6 du journal de l'École Polytechnique mis au jour en 1806.

353. Voici des rapprochements curieux entre l'équation de l'art. précédent et la théorie générale des moments exposée art. 157 et suivants. J'observe, d'abord, que, lorsque cette équation a lieu pour un système d'axes coordonnés dont l'intersection commune est à un point déterminé de l'espace, elle a aussi lieu pour tout autre système d'axes coordonnés ayant leur intersection commune au même point. Cette proposition, dont la vérité est déja assurée par des considérations mécaniques, peut aisément se vérifier, par des considérations purement analytiques, au moyens des théorèmes des art. 168, 342 et 343; ensuite, si, dans l'équation de l'art. 184, on suppose que le moment maximum K se rapporte à l'origine des x, y et z, c'est-à-dire au point pour lequel on a $a=0$, $b=0$, $c=0$, θ sera l'angle formé par l'axe du moment maximum, rapporté à cette origine, et par la direction de la résultante générale R. L'équation de l'art. précédent exprime donc, que, lorsque la résultante est unique, cet angle θ doit être un angle droit. De plus $\lambda X+\mu Y+\nu Z$ étant une somme constante par rapport à tous les points du système

(*) *Plan raisonné de la partie de l'enseignement de l'École Polytechnique, qui a, pour objet, l'équilibre et le mouvement des corps.* Par M. DE PRONY. Paris An IX (1800).

puisque la seule quantité K, de l'équation de l'article cité, renferme les coordonnées a, b, c, variables d'un point à l'autre de ce système, si $\cos.\theta$ est zéro, pour un de ces points, il le sera pour tous les autres, et $K\cos.\theta = 0$ sera applicable à l'étendue entière du corps. On prouve ainsi par des considérations purement analytiques que, lorsque l'équation de condition de l'article précédent, est satisfaite, en rapportant les moments λ, μ et ν à une origine et à un système d'axes coordonnés particuliers, elle doit l'être encore pour toute autre origine et tout autre système d'axes.

Enfin, art. 186 et 194, la somme des moments des forces, prise, relativement à une parallèle quelconque à la direction de la résultante générale R, et la valeur du moment *minimum maximorum*, sont, l'une et l'autre, égales à zéro dans le cas où les forces, appliquées au système, ont une résultante unique.

On voit, par ce rapprochement, et par les résultats généraux de la théorie démontrée depuis l'art. 342, comment les propositions, démontrées sur les moments, qui n'étaient d'abord que des vérités purement géométriques (comme je l'ai observé art. 200) se trouvent liées aux questions dans lesquelles les actions des forces entrent en considération.

354. Lorsque l'équation précédente est satisfaite, l'intensité, la direction et le sens d'action de la résultante unique, dont cette équation assure l'existence, se déterminent aisément par les équations (A') et (B) de l'art. 352, les équations (A') donnent

$$R = (X^2 + Y^2 + Z^2)^{\frac{1}{2}}; \cos.\alpha = \frac{X}{R}; \cos.6 = \frac{Y}{R}; \cos.\gamma = \frac{Z}{R}.$$

et les équations (B) sont celles de la ligne de direction de R.

La somme des moments des forces est nulle tant par rapport à la ligne dont je viens de déterminer la position que par rapport à toutes les droites qui pourraient la couper sous des angles quelconques.

355. On peut remarquer que les équations (A), de l'article 351, donnent $R_{,}^2 + R_{,,}^2 + R_{,,,}^2 = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2)$, d'où on conclut $R = (R_{,}^2 + R_{,,}^2 + R_{,,,}^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{2}$.

356. Dans le cas où l'équation de condition (C), de l'art. 352, ne serait pas satisfaite, et où, par conséquent, les forces du système ne pourraient pas être remplacées par une résultante unique, on a un moyen, digne

d'attention et que j'ai expliqué, art. 178, de les composer en une seule force et une couple; ce moyen consiste à faire passer, par l'origine des x, y et z, (qui peut être un point quelconque attaché au système) des lignes parallèles aux directions de toutes les forces P, et à faire agir, en sens contraires, sur chacune de ces lignes, deux forces égales entr'elles et à la force P qui leur est parallèle.

Cette disposition ne change rien à l'état du système, comme je l'ai observé à l'art. cité, mais si on compose en une seule résultante R, toutes les forces appliquées à l'origine, qui ont le même sens d'action que leurs correspondantes dans le système, il ne restera plus que des couples de forces susceptibles d'être composées en une couple unique, ainsi que je vais le démontrer.

Des *couples* des forces, qui agissent dans des plans différents.

357. J'ai donné, art. 238, la définition de ce qu'on entend par *couple*, et il suit, de cette définition, que pour exprimer les conditions de l'équilibre entre plusieurs couples agissant, dans des plans différents, sur un système de forme quelconque invariable, il suffit de poser, entre les forces qui composent ces couples, les trois équations (b) de l'art. 346 qui se rapportent aux moments des forces, puisque les trois équations (a) sont satisfaites *à priori*, les sommes des composantes parallèles aux axes étant évidemment nulles lorsque les forces, en nombre pair, sont deux-à-deux, parallèles, égales, et dirigées en sens opposés.

358. Soit x l'intensité d'une des forces égales qui composent une couple, ε la distance entre leurs directions, ϕ l'angle que forme, avec le plan xy, la droite perpendiculaire au plan de cette couple, (c'est-à-dire, au plan dans lequel agissent les forces x), droite que j'appellerai, dorénavant, *axe de la couple*, et η le complément de l'angle que forme, avec l'axe des x, la ligne d'intersection du plan de la couple et du plan xy, que je désignerai par ligne (η), je puis, d'après ce qui est dit, art. 244, donner, à la couple, une position arbitraire, dans son plan, sans rien changer à son effet sur le système, et je la place de manière que la direction d'une des forces x coïncide avec la ligne (η); dans cet état, nommant p la perpendiculaire menée, de l'origine, sur la ligne (η) le moment de la couple, par rapport à l'axe des z, aura pour valeur $x(p+\varepsilon \sin.\phi)-xp$, ou $x\varepsilon \sin.\phi$, ses moments par rapports aux axes des x et des y seront,

respectivement $\varkappa\,\varepsilon$ cos. η cosin. ϕ, et $\varkappa\,\varepsilon$ sin. η cosin. ϕ; ces valeurs sont on ne peut pas plus aisées à vérifier, en observant que les distances entre les directions des forces de la couple, prises parallèlement au plan xy et à l'axe des z, sont, respectivement, ε sin. ϕ et ε cos. ϕ, et que celle de ces forces qui est placée dans le plan xy, a ses moments égaux à zéro, par rapport aux axes des x et des y, les composantes respectives de l'autre force, perpendiculaires aux mêmes axes, étant $\varkappa$ cos. η et $\varkappa$ sin. η.

359. α, δ et γ, désignant, respectivement, les angles formés par l'axe de la couple et par les axes des x, des y et des z, on a, article 28, cos. η cos. ϕ = cos. α, sin. η cos. ϕ = cos. δ, sin. ϕ = cos. γ, et en introduisant ces valeurs dans les expressions de l'article précédent, on trouve que la couple $\varkappa\,\varepsilon$ donne, par rapport aux axes des x, des y et des z, les moments respectifs $\varkappa\,\varepsilon$ cos. α, $\varkappa\,\varepsilon$ cos. δ, $\varkappa\,\varepsilon$ cos. γ.

360. La distance p a disparue de ces valeurs, qui ne contiennent que le produit $\varkappa\,\varepsilon$ et les quantités angulaires; ainsi les moments d'une couple, par rapport aux axes coordonnées, restent les mêmes non seulement lorsque la couple prend toutes les positions possibles, dans son plan, mais encore lorsqu'on la transporte de ce plan sur un autre plan quelconque qui lui est parallèle. En général l'effet d'une couple, sur un système, est indépendant, tant de la position de son axe (lorsqu'il demeure parallèle à une ligne fixe) que de la position du point d'intersection de son plan avec ce même axe.

361. J'ajouterai que le moment d'une couple $\varkappa\,\varepsilon$, par rapport à une ligne tracée arbitrairement, sur un plan perpendiculaire à son axe, ou parallèle à son plan, est toujours égal à zéro; cette proposition peut se déduire des valeurs trouvées, art. 358 et 359, qui se réduisent, dans ce cas, au produit de $\varkappa\,\varepsilon$ par une quantité nulle, mais on voit, sur le champ, sans recourir à ces valeurs, que la somme des moments des deux forces de la couple, par rapport à toute ligne tracée dans un plan parallèle au sien, sera, nécessairement, composées de deux termes égaux et de signes contraires.

362. D'après ce qui précède, si on a un nombre quelconque de couples, appliquées à un système de forme invariable, l'axe de l'une de ces couples, désignées par $\varkappa\,\varepsilon$, faisant avec les axes des x, des y et des z, les angles respectifs α, δ et γ, on aura art. 359, pour les sommes respectives de leurs moments par rapport aux axes des x, des y et des

z, les valeurs $\Sigma(x\,\varepsilon\cos.\alpha)$, $\Sigma(x\,\varepsilon\cos.\delta)$, $\Sigma(x\,\varepsilon\cos.\gamma)$, et, article 357, les conditions de l'équilibre de ces couples seront complétement exprimées par les trois équations (b) de l'art. 346 qui deviennent, dans le cas dont il s'agit ici,

$$\Sigma(x\,\varepsilon\cos.\alpha)=0\,;\ \Sigma(x\,\varepsilon\cos.\delta)=0\,;\ \Sigma(x\,\varepsilon\cos.\gamma)=0$$

363. Si les couples ne sont pas en équilibre, on ne peut ni les remplacer ni leur faire équilibre par une force unique qui donnerait, parallèlement aux axes, des composantes que le système des couples n'a pas; il n'y a donc qu'une couple qui puisse remplir ces conditions, et en désignant, par Γ, l'une des forces qui la composent, par ε la distance entre les directions de ces forces, et par α, δ, γ, respectivement, les angles que forme son axe avec les axes des x, y et z, on a les équations

$$\Gamma\varepsilon\cos.\alpha-\Sigma(x\,\varepsilon\cos.\alpha)=0$$
$$\Gamma\varepsilon\cos.\delta-\Sigma(x\,\varepsilon\cos.\delta)=0$$
$$\Gamma\varepsilon\cos.\gamma-\Sigma(x\,\varepsilon\cos.\gamma)=0$$

les lettres x, ε, α, δ, γ sous le signe Σ, représentant les quantités accentuées x', x'', etc. ε', ε'', etc. α', α'', etc. qui se rapportent à chaque couple.

En désignant par $\Sigma_{,}$, $\Sigma_{,,}$, $\Sigma_{,,,}$, respectivement, les sommes qui forment les 2es termes de la 1re, de la 2e et de la 3e de ces équation, on a

$$\Gamma\varepsilon=\{\Sigma_{,}^2+\Sigma_{,,}^2+\Sigma_{,,,}^2\}^{\frac{1}{2}}$$
$$\cos.\alpha=\frac{\Sigma_{,}}{\Gamma\varepsilon}\,;\ \cos.\delta=\frac{\Sigma_{,,}}{\Gamma\varepsilon}\,;\ \cos.\gamma=\frac{\Sigma_{,,,}}{\Gamma\varepsilon}$$

l'une des deux quantités Γ et ε est arbitraire, et l'axe de la couple $\Gamma\varepsilon$ peut être dirigée par un point quelconque de l'espace, pourvu qu'il fasse avec les axes coordonnés, les angles qu'on vient de déterminer.

364. On revoit dans ces équations, entre la couple *résultante* et les couples *composantes*, exactement les mêmes relations déjà trouvées, art. 170, entre le moment *maximum* et les moments des forces quelconques appliquées au système; les mêmes équations prouvent aussi, ce qu'on savait déjà, art. 175 et 361, que la couple *résultante* n'a de moment par rapport à aucune ligne tracée dans un plan perpendiculaire à son axe, ainsi la théorie à laquelle l'art. cité appartient, a une liaison intime avec celle qui fait l'objet des art. précédents.

365. Il est aisé, d'après les formules de l'art. 363, de remplacer toutes

les forces appliquées à un système, par une force, non accouplée, et par une couple, dans les cas où on ne peut pas obtenir de résultante unique. Pour cela on appliquera, à l'origine, des forces égales et parallèles à celles du système, ainsi qu'il est expliqué art. 178 et 356; on aura ainsi à l'origine, une résultante générale R, de toutes les forces qui y agissent dans le même sens que leurs correspondantes dans le système, laquelle se déterminera par les formules de l'art. 65. Il restera ensuite autant de couples que de forces primitivement appliquées au système, et chacune de ces forces, sans avoir subi aucune espèce de changement, fera partie d'une des couples. Considérant, ensuite, que les moments des couples sont les seuls moments du système, puisque les forces déjà composées sont appliquées à l'origine, et que, de plus, une des forces de chaque couple passant par la même origine, le moment de cette couple est identique avec le moment de l'autre force, on a, en donnant à λ, μ, ν les significations convenues art. 352, $\Sigma_{,}=\lambda$, $\Sigma_{,,}=\mu$, $\Sigma_{,,,}=\nu$, et les couples introduites dans le système par les opérations indiquées ci-dessus, se composeront, en une seule Γe, qu'on déterminera en substituant dans les équations de l'art. 363, pour $\Sigma_{,}$, $\Sigma_{,,}$, $\Sigma_{,,,}$, les valeurs qu'on vient d'assigner, et le résultat de la substitution donnera

$$\Gamma e=\{\lambda^2+\mu^2+\nu^2\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\cos.\alpha=\frac{\lambda}{\Gamma e}\ ;\ \cos.6=\frac{\mu}{\Gamma e}\ ;\ \cos.\gamma=\frac{\nu}{\Gamma e}.$$

Cette couple Γe, et la force R, pourront remplacer toutes les forces du système, ou leur faire équilibre, suivant les sens dans lesquels on les fera agir.

366. L'angle formé par l'axe de la couple Γe, et par la direction de la résultante R, a pour cosinus

$$\frac{\lambda X+\mu Y+\nu Z}{R.\Gamma e}$$

Lorsque cet angle sera droit, le plan de la couple se trouvera parallèle à la direction de R, et ce plan pourra, art. 360, être placé de manière à renfermer R. Les forces de la couple se composeront, alors, avec R, en une résultante unique, et comme la condition de l'existence de cette résultante est que le cosinus, dont je viens de donner la valeur, soit égal à zéro, on l'exprime par l'équation

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z = 0$$

c'est celle qui a été déjà trouvée, art. 352, pour exprimer la même condition.

367. La partie de la théorie des couples, exposée dans les articles précédents, y a été considérée comme une conséquence de la théorie de l'équilibre d'un système de forme quelconque, démontrée depuis l'art. 342 jusqu'à l'art. 356; cette méthode a réuni les avantages de faire faire aux élèves, en peu d'instants, une étude utile et de fixer plus longtemps leur attention sur une des parties les plus importantes de la statique; cependant toutes les propositions relatives aux couples peuvent se rattacher immédiatement aux premières notions sur la composition des forces, et être ensuite employées, comme bases de raisonnement, dans la recherche des vérités dont je les ai déduites comme corollaires; c'est là ce qu'a fait Mr. Poinsot, dant sa *statique*, et dans le mémoire cité art. 199 où il a le premier, présenté une théorie des couples, également neuve et complète, avec ses principales applications.

De l'équilibre d'un système de forme invariable, lorsqu'il y a, dans ce système, un point ou un axe fixe. Pression du point et de l'axe fixe. Forces qui peuvent établir l'équilibre lorsqu'il n'existe pas.

368. Un système, ou un corps, de forme invariable, étant supposé avoir un point fixe, je puis, sans nuire à la généralité des résultats, prendre ce point fixe pour origine des coordonnées; continuant d'ailleurs à me servir de la notation convenue art. 342 et 351, et réduisant, par les décompositions expliquées art. 344, toutes les forces appliquées aux différents points du système, ou du corps, à des composantes qui agissent dans les plans coordonnés, j'ai, dans ces plans, les résultantes $R_{,}$, $R_{,,}$, $R_{,,,}$, dont on trouve, art. 351, les valeurs, données par les équations (A), au-dessous desquelles se trouvent les équations (B) des lignes de direction de ces forces.

Il faut, pour l'équilibre, art. 145 et 146, que chacune des forces $R_{,}$, $R_{,,}$, $R_{,,,}$, soit dirigée sur le point fixe du plan dans lequel elle agit, (ce point est, ici, le même pour les trois plans, c'est l'origine commune de x, y et z) et on exprime cette condition, en égalant à zéro le terme constant de l'équation de la ligne de direction de la résultante, l'origine

des coordonnées étant au point fixe ; ainsi, l'équilibre du système, ou du corps, de forme invariable, retenu par un point fixe, a lieu lorsque les équations suivantes sont satisfaites

$$\lambda = 0\,;\ \mu = 0\,;\ \nu = 0.$$

Ce sont les trois équations (b) de l'art. 346, obtenues, ici, en égalant à zéro les termes constants des équations (B) de l'art. 351.

369. Les conditions de l'équilibre d'un corps, dans le cas d'un point fixe, sont donc communes à ce cas et à celui du corps libre, elles consistent dans l'égalité à zéro de la somme des moments des forces, par rapport à chaque axe coordonné, en particulier, énoncée par les trois équations $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 0$; mais l'équilibre du corps libre exige, de plus, que les sommes des composantes parallèles à chacun des axes coordonnés soient nulles, ce qui donne comme on a vu art. 346, trois autres équations $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$,

370. Lorsque les équations de l'équilibre de l'art. 368 ont lieu par rapport à un système de plans coordonnés, dont l'intersection commune est au point fixe, des équations de même forme ont lieu par rapport à tout autre système de plans coordonnés qui se couperaient au même point ; en effet les sommes des moments, sur les nouveaux axes, respectivement correspondantes à λ, μ et ν étant désignées par $\lambda_,$, $\mu_,$, $\nu_,$, on aurait, art. 171, $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = \lambda_,^2 + \mu_,^2 + \nu_,^2$, d'où on conclurait, comme à l'art. 349, $\lambda_, = 0$, $\mu_, = 0$, $\nu_, = 0$.

371. Enfin l'équilibre, qui est assuré par les équations de l'art. 368, ne peut avoir lieu qu'autant que ces équations sont, toutes trois satisfaites, car, s'il en était autrement, les résultantes $R_,$, $R_{,,}$, $R_{,,,}$, ou une partie d'entr'elles, ne passeraient pas par le point fixe, art. 145 et 146, et l'axe coordonné, perpendiculaire au plan sur lequel se trouverait une de ces forces non dirigée sur le point fixe, étant supposé immobile, le corps prendrait nécessairement du mouvement autour de cet axe, art. 336; l'équilibre exige donc, art. 338, que $R_,$, $R_{,,}$ et $R_{,,,}$, soient toutes dirigées sur le point fixe, ou que les équations $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 0$ soient toutes trois satisfaites.

372. Pour déterminer la pression que supporte le point fixe, j'observe que les résultantes $R_,$, $R_{,,}$, $R_{,,,}$, qui agissent dans les plans xy, xz, yz, et dont les valeurs sont données par les équations (A) de l'art. 351, étant, par hypothèse, dirigées sur l'origine, ou le point fixe, les composantes

santes de ces forces, prises parallèlement aux axes coordonnés, doivent agir dans les directions mêmes de ces axes. Or les plans xy et xz fournissent, chacun, une de ces composantes, égale à $\frac{1}{2}X$, dans le sens des x, la somme des deux étant X, et on trouvera, de même dans le sens des y et dans le sens des z, les forces respectives Y et Z; la pression du point fixe sera donc $=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$, valeur de la résultante des forces X, Y, Z appliquées à ce point.

Cette pression étant désignée par Π, la ligne, suivant laquelle elle se trouvera dirigée, fera avec les axes des x, y et z des angles dont les cosinus auront, art. 65, pour valeurs respectives, $\frac{X}{\Pi}$, $\frac{Y}{\Pi}$, $\frac{Z}{\Pi}$.

373. On voit, par ce qui précède, que lorsqu'un système, ou un corps de forme invariable, retenu par un point fixe et sollicité par des forces quelconques, est en équilibre, la pression du point fixe est la même que si toutes les forces du système étaient immédiatement appliquées à ce point, parallèlement aux directions qu'elles ont sur leurs points effectifs d'application, et en conservant leurs sens d'action et leurs intensités.

374. Il me reste à compléter la théorie exposée dans les six articles précédents, en déterminant, pour le cas où l'équilibre autour du point fixe n'existe pas, la force qui, suivant le sens d'action qu'on lui donnera, pourra, ou établir cet équilibre, ou remplacer les forces appliquées au système. Je fais, d'abord, relativement à ces dernières forces, l'opération expliquée, art. 178 et 356, les nouvelles forces introduites dans le système étant appliquées au point fixe, qui est l'origine des x, y et z; cette opération me donne une résultante générale $R=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$, dont l'effort est détruit par le point fixe, et il ne s'agit plus que de trouver la résultante des couples qui restent dans le système; ce problème est celui qui a été résolu, art. 365, où on a vu que, la couple résultante cherchée étant représentée par le produit $\Gamma\varepsilon$, sa valeur et la direction de son axe se déterminaient par les équations

$$\Gamma\varepsilon=\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2};\ \cos.\alpha=\frac{\lambda}{\Gamma\varepsilon};\ \cos.\delta=\frac{\mu}{\Gamma\varepsilon};\ \cos.\gamma=\frac{\nu}{\Gamma\varepsilon}$$

cette couple existe donc dans un plan passant par l'origine, ou par le point fixe, et formant avec les x, y et z des angles respectifs, dont les sinus sont, $\lambda:\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}$; $\mu:\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}$; $\nu:\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}$. On

peut supposer qu'une des forces Γ, qui la composent, est constamment appliquée au point fixe, et, dans ce cas, on remplace toutes les forces du système, ou on leur fait équilibre à volonté, en appliquant à un point, pris arbitrairement dans le plan dont je viens de déterminer la position, une force Γ, d'intensité pareillement arbitraire, agissant à une distance $(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)^{\frac{1}{2}} : \Gamma$ du point fixe; ou, si on se donne la distance ε de ce point fixe à la direction de la force Γ, cette force doit avoir, pour valeur, $(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)^{\frac{1}{2}} : \varepsilon$. Si Γ est destinée à établir l'équilibre, la pression qu'éprouvera le point fixe, lorsqu'on aura obtenu cet équilibre, se déterminera par les formules de l'art. 372, dans lesquelles on introduira la valeur de Γ et ses angles avec les axes. On peut ainsi profiter de ce qu'il y a d'arbitraire dans l'intensité ou la direction de Γ, pour remplir certaines conditions relatives à la pression.

375. Occupons nous maintenant des questions relatives à l'équilibre autour d'un axe fixe. Je suppose que cet axe est celui des z et, conservant la notation adoptée depuis l'art. 368, je commence par remplacer, comme aux art. 344 et 368, toutes les forces appliquées au système par des forces agissant dans les plans coordonnés, parallèlement aux axes que renferment ces plans, sur lesquels j'ai les trois composantes $R_{,}$, $R_{,,}$, $R_{,,,}$, dont les équations de l'art. 351, donnent les valeurs et les directions.

L'axe des z étant l'axe fixe, les efforts des résultantes $R_{,,}$ et $R_{,,,}$ sont annullés par la résistance de cet axe, et il ne reste plus que la force $R_{,}$, dans le plan xy, qui puisse mettre le système en mouvement; les conditions de l'équilibre se réduisent donc à énoncer que cette force $R_{,}$ est dirigée sur l'axe, ou que le terme constant de la première des équations (B), art. 351, est égal à zéro, ce qui donne pour équation unique d'équilibre.

$$\nu = 0$$

laquelle exprime que la somme des moments des forces, pris par rapport à l'axe fixe, doit être nulle.

376. Lorsque cette équation a lieu, l'équilibre est assuré, et il est évident que, si elle n'était pas satisfaite, la force $R_{,}$ qui, alors, ne serait plus dirigée sur l'axe fixe, ferait nécessairement tourner le système, ou le corps, autour de cet axe.

Ainsi, des six équations qui doivent être satisfaites pour l'équilibre d'un système ou d'un corps libre, trois suffisent si on rend un point

fixe dans ce système, et il n'en faut qu'une dans le cas d'un axe fixe.

377. En traitant de la pression de l'axe fixe, je supposerai que cet axe est retenu à deux points seulement; je placerai l'un de ces points à l'origine des coordonnées, l'autre à une distance c de cette origine, et la recherche de leurs pressions conduira à des résultats, qui auront toute la généralité que peut comporter une question de cette nature.

Pour arriver promptement et facilement à ces résultats, je considère l'axe de rotation comme *libre*, et je me propose de mettre le système en équilibre, au moyen de trois forces, désignées par $N_{,}$, $N_{,,}$, $N_{,,,}$, la première appliquée à l'origine des coordonnées, dans le plan xy, faisant un angle $\psi_{,}$ avec l'axe des x; la deuxième, appliquée à l'autre extrémité de c perpendiculairement à c, ou à z, et faisant un angle $\psi_{,,}$ avec le plan xz, ou avec l'axe des x, la troisième enfin agissant dans la direction de l'axe c ou z. Les conditions d'équilibre entre ces forces et celles dont le système éprouve déjà l'action donnent, art. 346, les équations

$$(m) \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} N_{,}\cos.\psi_{,} + N_{,,}\cos.\psi_{,,} = X \\ N_{,}\sin.\psi_{,} + N_{,,}\sin.\psi_{,,} = Y \\ N_{,,,} = Z \\ cN_{,,}\cos.\psi_{,,} = \mu \\ cN_{,,}\sin.\psi_{,,} = \lambda \end{array} \right.$$

on a par hypothèse, art. 375, une 6ᵉ équation $\nu = 0$. La quatrième et la cinquième équation donnent

$$(n_{,,}) \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} N_{,,} = \dfrac{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}{c} \\ \text{tang. } \psi_{,,} = \dfrac{\lambda}{\mu} \end{array} \right.$$

et en substituant, dans la 1ʳᵉ et la 2ᵉ, les valeurs $\frac{\mu}{c}$ et $\frac{\lambda}{c}$ de $N_{,,}\cos.\psi_{,,}$ et $N_{,,}\sin.\psi_{,,}$, tirées de ces mêmes 4ᵉ et 5ᵉ équations, on a,

$$(n_{,}) \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} N_{,} = \dfrac{\sqrt{(cX-\mu)^2+(cY-\lambda)^2}}{c} \\ \text{tang. } \psi_{,} = \dfrac{cY-\lambda}{cX-\mu}. \end{array} \right.$$

enfin la troisième équation donne

$$(n_{,,,}) \ldots\ldots\ldots N_{,,,} = Z.$$

Telles sont les intensités et les directions des trois forces qui tiendraient l'axe immobile s'il n'étoit pas retenu aux extrémités de c, et qui en général fourniraient les cinq équations à ajouter à l'équation $\nu=0$, pour tenir en équilibre le corps supposé libre. Ces forces représentent donc les pressions que l'axe éprouve lorsqu'il est fixé ; les deux premières lui sont perpendiculaires, aux deux points par lesquels on le suppose retenu, la troisième est l'effort qui s'oppose à son mouvement dans le sens de sa longueur.

378. Les deux pressions normales ne sont pas en général, dirigées dans le même plan ; ce cas particulier a lieu, lorsque les angles ψ' et ψ'' sont égaux entr'eux, ce qui donne l'équation de condition

$$\lambda X = \mu Y$$

à laquelle on parvient en égalant les valeurs de tang. $\psi_{,}$ et tang. $\psi_{,,}$.

379. Toutes les composantes $P\cos.\gamma$ étant supposées nulles et l'équilibre, autour de l'axe fixe, ayant toujours lieu, le système ne sera plus sollicité que par des forces agissant dans des plans perpendiculaires à l'axe des z ou à l'axe fixe, et on aura

$$\lambda = \Sigma\,(P z \cos.\,\delta)\,,$$
$$\mu = -\Sigma\,(P z \cos.\,\alpha)\,,$$

les quatrième et cinquième équations (m) de l'art. 377 deviendront

$$c\,N_{,,} \cos.\,\psi_{,,} + \Sigma(P z \cos.\,\alpha) = 0$$
$$c\,N_{,,} \sin.\,\psi_{,,} - \Sigma(P z \cos.\,\delta) = 0$$

ces deux équations, les deux premières de l'article cité, et, par conséquent les valeurs de $N_{,}$ et $N_{,,}$, sont les mêmes qu'on obtiendrait si toutes les forces $P\cos.\alpha$, dont se compose X, et toutes les forces $P\cos.\delta$ dont se compose Y, (l'angle δ est, dans le cas actuel, complément de l'angle α) agissaient, respectivement, dans le plan xz et dans le plan yz, aux mêmes distances z, du plan xy, auxquelles se trouvent, par rapport à ce plan, les directions des forces P, qui sont supposées lui être parallèles.

On conclut de là que, lorsque des forces dirigées dans des plans perpendiculaires à un axe fixe, sont en équilibre autour de cet axe, elles lui font éprouver les mêmes pressions que si elles lui étaient immédiatement appliquées, chacune dans le plan normal à cet axe où elle a sa direction.

380. Si les forces en équilibre autour de l'axe fixe, dans des plans perpendiculaires à cet axe, sont des couples, on aura

$$X=0\,;\ Y=0,$$
$$\Sigma(Pz\cos.\alpha)=0\,;\ \Sigma(Pz\cos.\delta)=0,$$

(observez qu'à un même z, correspondent, par tout, deux composantes $P\cos.\alpha$, ou $P\cos.\delta$, égales et de signes contraires) et, par conséquent, $N_{,}=0$ et $N_{,,}=0$. Les pressions sur l'axe seront donc nulles dans ce cas ; cette proposition peut se déduire de la propriété, démontrée art. 360, des couples qui ont un même axe ; leurs plans peuvent couper cet axe commun, en des points quelconques, sans que leurs effets soient changés ; mettant, d'après cette propriété, toutes les couples dans un même plan, on leur appliquera, alors, le théorème de l'art. 246, où on a vu que des couples en équilibre, dans un plan, ne font d'effort sur aucun point de ce plan.

381. Dans le cas contraire à celui des deux articles précédents, c'est-à-dire, lorsque les forces parallèles à l'axe immobile de rotation sont les seules appliquées au système, on a

$$X=0\,;\ Y=0$$
$$\Sigma(Pz\cos.\alpha)=0\,;\ \Sigma(Pz\cos.\delta)=0$$
$$\lambda=-\Sigma(Py\cos.\gamma)\,;\ \mu=\Sigma(Px\cos.\gamma)$$

les quantités $N_{,}$ et $N_{,,}$, deviennent égales entr'elles, ainsi que les valeurs angulaires $\psi_{,}$, $\psi_{,,}$; les pressions s'exercent alors dans un même plan, et on peut remarquer que l'équation de conditiun $\lambda X-\mu Y=0$, de l'art. 378, se trouve satisfaite puisqu'on a $X=0$ et $Y=0$.

Ainsi les forces parallèles à l'axe immobile, étant supposées réduites à une seule, désignée par Π, qui agirait à une distance ξ de l'axe de rotation, les pressions $N_{,}$ et $N_{,,}$ seraient toutes deux dirigées dans le plan qui renfermerait l'axe de rotation et la direction de Π, et on aurait, d'après les 4e et 1re équation (m), de l'art. 377,

$$N_{,,}=\frac{\Pi\xi}{c}\,;\ N_{,}=-N_{,,}$$

Telle est la forme des équations particulières fournies par l'une quelconque des forces parallèles à l'axe immobile de rotation, laquelle lui fait éprouver, à l'urigine et à l'extrémité de c, des pressions normales,

exercées, en sens contraires, dans le plan qui renferme l'axe et la direction de la force, et égales, chacune, au produit decette force par le rapport entre la distance de son point d'application à l'axe de rotation et la longueur de cet axe.

382. Lorsque les forces qui agissent autour de l'axe fixe, ne se font pas équilibre, on peut, ou les remplacer, quant à leur énergie pour faire tourner le système autour de l'axe fixe, ou établir l'équilibre, dans ce système, avec une force unique; la seule condition à remplir, dans ce cas, consiste dans l'égalité du moment de cette force, par rapport à l'axe fixe, à la somme des moments de toutes les forces qu'elle doit remplacer, ou auxquelles elle doit faire équilibre; c'est une conséquence évidente de ce qui est démontré, précédemment, art. 375. et suivants.

Si la force unique, dont je parle, est employée à établir l'équilibre dans le système, on calculera la pression de l'axe, après l'équilibre établi, en introduisant dans les équations de l'art. 377, les valeurs dûes à cette nouvelle force, qui permettent des déterminations arbitraires, dont on peut profiter, pour remplir certaines conditions.

FIN DE LA DEUXIÈME SECTION.

SECTION III.

DE L'ÉQUILIBRE DES FORCES *APPLIQUÉES* A UN SYSTÈME DE POINTS *DONT* LA FORME EST VARIABLE.

PRINCIPE GÉNÉRAL *DE L'ÉQUILIBRE.*

Observations générales.

383. La théorie de l'équilibre et de la composition des forces appliquées aux systèmes de forme invariable, a pu être présentée d'une manière complète, dans la deuxième section de ce traité, et cet avantage tient au mode de liaison qui existe entre leurs parties. Les systèmes de forme variable, assujettis à des conditions particulières à chacun d'eux, auxquelles il est indispensable d'avoir égard, dans la recherche des conditions de leur équilibre, n'offrent pas, à beaucoup près, la même simplicité et la même facilité dans l'analyse des questions qui les concernent; on y trouve un champ, sans bornes, ouvert à la méditation et à l'étude, et des problèmes à résoudre, qui ont exercé les plus grands géomètres.

384. Cependant les théorèmes démontrés, dans la section précédente, sur l'équilibre des systèmes de forme invariable à deux et à trois dimensions, sont encore applicables aux systèmes de nature quelconque;

pour s'en convaincre, il suffit d'observer que lorsqu'un système est en équilibre, quelques soient les conditions de la liaison de ses parties et les mouvements, tant absolus que relatifs, que peuvent prendre les points matériels qui le composent, l'équilibre doit encore subsister, si les distances respectives entre ces points deviennent invariables. On a donc, dans tous les cas, entre des forces en équilibre, des équations absolument indépendantes du mode de transmission de leurs actions, qui sont les équations de l'art. 346, lorsque le système est *libre*. Mais il peut se faire et il arrive, en effet, que certaines combinaisons de forces qui seraient en équilibre sur un système de forme invariable, ne pourraient pas l'être sur un système, égal et semblable, de forme variable, parce qu'elles dénatureraient cette forme en violant les conditions auxquelles elle est assujettie, et l'application des équations d'équilibre de l'art. 346, ne doit porter que sur les combinaisons de forces compatibles avec la nature de ce dernier système.

Je parlerai bientot d'un principe général d'équilibre applicable sans exception, à toutes les espèce de systêmes; je ferai voir, en même temps, l'usage indispensable qu'il faut faire, en se servant de ce principe, des *équations de condition* au moyen des quelles on introduit, dans l'analyse, le mode de liaison des parties du système.

385. Puisque les forces appliquées à un système libre, dont les changements de forme sont assujettis à des lois quelconques, doivent, lorsqu'elles sont en équilibre, satisfaire aux six équations de l'art. 346, l'observation de l'art. 350, qui d'abord, n'était applicable qu'à un système de forme invariable, devient applicable sans exception, à tous les modes possibles de transmission des actions des forces; on peut donc donner, comme proposition généralement vraie, que des forces en équilibre sur un système libre de forme et de nature quelconque, seraient encore en équilibre, si conservant leurs intensités, leurs sens d'actions, et les angles qu'elles font avec les axes coordonnés, on les appliquait, toutes, à un même point pris arbitrairement dans l'espace.

Le poligone et la courbe funiculaires, vont me fournir des exemples de l'application des principes généraux de l'équilibre aux systêmes de forme variable, également intéressants, comme exercices d'analyse, et utiles par les résultats auxquels ils conduisent et dont la mécanique pratique peut tirer un parti avantageux.

Définition

Définition du système funiculaire. Réflexions générales sur l'équilibre des forces qu'on peut y appliquer. Équations de *condition* de ce système.

386. Un système funiculaire est un assemblage de fils, ou cordons, que je supposerai, dans les recherches qui font l'objet de cette troisième section, parfaitement flexibles et inextensibles. Ces cordons tiennent les uns aux autres, soit par des *nœuds* qui sont fixes sur les longueurs de quelques uns d'entr'eux, soit par des *anneaux*, qui peuvent couler, et au moyen desquels les points des cordons, auxquels ces anneaux sont attachés, peuvent répondre à différents points des longueurs de ceux qui les traversent.

Ce système est, ou *libre*, ou retenu par un ou plusieurs points, soit à d'autres points immobiles, soit à un autre système.

387. Lorsque des forces, d'intensités et directions quelconques, sont en équilibre sur un système funiculaire, chacun des cordons à l'extrémité duquel une force est appliquée, et qui ne tient au système que par son autre extrémité, a une direction commune avec celle de cette force, dont l'intensité est représentée par la *tension* du cordon qui transmet son action au système.

388 Le système en équilibre étant supposé libre et composé de manière qu'il n'offre, nulle part, de polygone fermé, rien n'est plus aisé que de vérifier, sur des formes variées à volonté, le théorème général de l'art. 385, et de ramener, dans la direction de l'un quelconque des cordons, les actions de toutes les forces appliquées au système. On trouvera, sur cette direction, deux groupes de composantes, l'un formé de forces qui tirent dans un sens, et l'autre, de forces qui tirent dans le sens directement opposé, les deux groupes ayant des résultantes égales, ainsi la *tension* du cordon aura, pour valeur, la somme des produits, de même signe, obtenus en multipliant chaque force pour le cosinus de l'angle que fait sa direction avec celle de ce cordon.

389. S'il existe, dans le système funiculaire, des assemblages de cordons qui forment des polygones fermés, il pourra se faire que quelques-uns de ces cordons ne soient pas tendus; soient, par exemple, les cordons OA, OB, OC assemblés en O, par un *nœud*, et tirés par des forces P, Q, R dont chacune soit, en intensité et en direction, la résultante des deux autres, les cordons AB, BC, CA n'éprouveront aucune ten- Fig. 15

sion, et, même, s'ils étaient lâches, il n'y aurait rien de changé dans les actions réciproques des forces; ces cordons, et tous ceux qui se trouveront dans le même cas, n'étant pas des moyens de transmission des actions des forces, doivent être, quant aux considérations d'équilibre, censés étrangers aux systèmes funiculaires auxquels ils sont attachés.

390. Un cordon qui traverse un anneau et dont les directions, de part et d'autre de cet anneau, forment un angle, a des tensions égales sur chacune de ces directions; il faut supposer que la pression du cordon, sur l'anneau, ne produit aucun frottement, et il est manifeste, dès-lors, que tout effort, qui s'exerce dans le sens de la longueur d'une des parties de ce cordon, doit se transmettre, sans altération, à l'autre partie.

Quant aux portions de cordons qui sont séparées par des nœuds, fixes sur les longueurs de ces cordons et supportant des efforts, elles peuvent avoir et ont, en général, des tensions différentes.

391. Les équations de conditions du système funiculaire sont aisées à poser d'après ce qui précède; tout cordon qui n'éprouve pas une certaine tension, ou qui est lâche, peut être censé étranger au système, et ceux qui éprouvent des tensions, et qui sont, par conséquent, des moyens de transmission des actions des forces, étant inextensibles, la distance entre deux nœuds, d'un même cordon, auxquels des forces sont supposées appliquées, est invariable; on a donc, entre deux quelconques de ces nœuds consécutifs, dont les coordonnées respectives sont x, y, z; $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$;

$$\{(x-x_{,})^2+(y-y_{,})^2+(z-z_{,})^2\}^{\frac{1}{2}} = \text{constante} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

quant aux cordons qui, entre deux nœuds supportant des efforts, traversent un ou plusieurs anneaux, sollicités par des forces, la distance d'un anneau aux nœuds, et d'un anneau à l'autre, est variable, mais la somme des distances entre les deux nœuds est constante, ainsi les coordonnées des nœuds étant les mêmes que précédemment, on a, en désignant celles des anneaux, dont le nombre est supposé $=n$, par x', y', z'; x'', y'', z''; etc.

$$\left.\begin{array}{l}\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}^{\frac{1}{2}}\\ +\{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2\}^{\frac{1}{2}}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +\{(x^{(n)}-x_{,})^2+(y^{(n)}-y_{,})^2+(z^{(n)}-z_{,})^2\}^{\frac{1}{2}}\end{array}\right\} = \text{constante} \quad \ldots \quad (2)$$

Il y aura, pour chaque longueur de cordon, comprise entre deux nœuds, une équation de la forme (1), ou une équation de la forme (2), ces formes sont les mêmes que celles des équations de l'art. 117, qui se rapportent au système dont tous les points gardent, entr'eux, des distances invariables, mais ce système a autant d'équations pareilles qu'on peut mener de lignes entre ses points pris deux-à-deux, au lieu que, dans le système funiculaire, il n'y en a qu'une pour chaque longueur prise sur un même cordon et terminée par des nœuds; cette circonstance exclut une infinité de combinaisons de forces, qui seraient en équilibre sur le premier système, et qui ne peuvent pas être appliquées au second.

Conditions de l'équilibre d'un polygone funiculaire soumis à l'action de plusieurs forces dont les directions sont dans des plans différents.

392. Je commence par le cas le plus général de l'équilibre du polygone funiculaire, vu que ce cas n'offre pas plus de difficulté que celui du polygone dont tous les côtés sont dans le même plan. Concevons, dans l'espace, une ligne matérielle, parfaitement flexible et inextensible, et des puissances $P_{,}$, $P_{,,}$ etc., d'intensités et directions quelconques, appliquées aux extrémités et à plusieurs autres points de cette ligne. Ces puissances étant supposées en équilibre, la ligne matérielle, ou le cordon, doit, en général, être une ligne *brisée*, formée de plusieurs parties droites, faisant, entr'elles, des angles aux sommets desquels se trouvent les points d'applications des puissances; ces parties droites sont les *côtés* du polygone funiculaire.

393. Il est évident que les directions des côtés extrêmes de ce polygone, sont les mêmes que les directions des puissances appliquées à ses points extrêmes, et que les tensions de ces côtés, sont égales aux intensités des puissances qui les tiennent tendus. La direction et la tension de chacun des autres côtés, ont des valeurs, qui dépendent des actions combinées des forces, et dont la détermination va être un de nos objets de recherche.

394. Le polygone étant supposé ouvert, je désignerai par le nom de 1er *côté*, un de ses côtés extrêmes, le côté contigu à celui-là, sera le 2e *côté*, le côté contigu au 2e sera le 3e *côté*, et ainsi de suite; de plus j'appellerai 1er *point*, l'origine commune du polygone et du 1er côté,

2ᵉ, 3ᵉ, 4ᵉ etc. *point*, respectivement, les points de réunion du 1ᵉʳ et du 2ᵉ, du 2ᵉ et du 3ᵉ, ou 3ᵉ et du 4ᵉ etc. côtés. Ces points de différents nᵒˢ. que je suppose être fixes sur la longueur du cordon, sont les sommets des angles du polygone et les points d'applications des forces.

$P_{,}$, $P_{,,}$, etc. sont les puissances appliquées au 1ᵉʳ, 2ᵉ, etc. point; et chacune d'elles fait, avec les axes des x, des y et des z, des angles respectifs α, β, γ, portant le même nᵒ. d'accentuation que la puissance à laquelle ils se rapportent.

Pareillement, un côté quelconque du polygone fait, avec les axes des x, y et z, des angles respectifs a, b, c, portant, aussi, le même nᵒ. d'accentuation que le côté auquel il se rapportent.

Enfin $t_{,}$, $t_{,,}$, $t_{,,,}$, etc. représentent les tensions du 1ᵉʳ, 2ᵉ, 3ᵉ, etc. côté.

395. Pour obtenir, maintenant, d'une manière simple et directe, les équations qui, lorsque le système est en équilibre, expriment les relations entre les quantités P, α, β, γ, a, b, c, t, de différents accents, j'observe que la tension du côté, nᵒ. m, celle du côté nᵒ. $m+1$, et la puissance, nᵒ. $m+1$, appliquée au point de réunion de ces deux côtés, doivent satisfaire, particulièrement, aux conditions d'équilibre entre trois forces; en effet la tension du côté nᵒ. m, résulte des actions combinées des forces nᵒˢ. m, $m-1$, $m-2$ etc. et représente ces actions, de manière que si on supprime les forces, nᵒˢ. 1, 2, . . . m, en conservant au côté nᵒ. m, sa tension et sa direction, il y aura toujours équilibre sur le point nᵒ. $m+1$; on prouvera, par un raisonnement semblable, que le même équilibre subsisterait en supprimant les forces nᵒˢ. $m+2$, $m+3$, etc. et laissant, au côté $m+1$, sa tension et sa direction; en résumé, les actions, sur le point nᵒ. $m+1$, provenant de la force nᵒ. $m+1$, et des tensions des côtés nᵒˢ. m et $m+1$ représentent exactement les actions qu'exerceraient, sur le même point, toutes les forces du système, si on les appliquait immédiatement à ce point, avec les conditions énoncées art. 178 et 356, et on sait art. 385 qu'elles y seraient en équilibre; donc, etc.

396. On déduit immédiatement de ce qui précède, les équations successives

$$\text{Point N}^\circ\ 1 \left\{ \begin{array}{l} P_{,} \cos. \alpha_{,} = t_{,} \cos. a_{,} \\ P_{,} \cos. \beta_{,} = t_{,} \cos. b_{,} \\ P_{,} \cos. \gamma_{,} = t_{,} \cos. c_{,} \end{array} \right.$$

Point N° 2 $\begin{cases} t_{,} \cos. a_{,} + P_{,,} \cos. \alpha_{,,} = t_{,,} \cos. a_{,,} \\ t_{,} \cos. b_{,} + P_{,,} \cos. \beta_{,,} = t_{,,} \cos. b_{,,} \\ t_{,} \cos. c_{,} + P_{,,} \cos. \gamma_{,,} = t_{,,} \cos. c_{,,} \end{cases}$

: :

Point N° m $\begin{cases} t_{(m-1)} \cos. a_{(m-1)} + P_{(m)} \cos. \alpha_{(m)} = t_{(m)} \cos. a_{(m)} \\ t_{(m-1)} \cos. b_{(m-1)} + P_{(m)} \cos. \beta_{(m)} = t_{(m)} \cos. b_{(m)} \\ t_{(m-1)} \cos. c_{(m-1)} + P_{(m)} \cos. \gamma_{(m)} = t_{(m)} \cos. c_{(m)} \end{cases}$

: :

Dernier point $\begin{cases} t_{(n)} \cos. a_{(n)} + P_{(n+1)} \cos. \alpha_{(n+1)} = 0 \\ t_{(n)} \cos. b_{(n)} + P_{(n+1)} \cos. \beta_{(n+1)} = 0 \\ t_{(n)} \cos. c_{(n)} + P_{(n+1)} \cos. \gamma_{(n+1)} = 0 \end{cases}$

le nombre des côtés est supposé $= n$ et il y a, par conséquent, un nombre de *points* $= n + 1$, auxquels les forces sont appliquées. Les trois équations, qui répondent à une même accolade, expriment les conditions de l'équilibre, sur un même *point*, entre les tensions des deux côtés qui y aboutissent et la force qui y est appliquée ; ces trois équations représentent celles de l'art. 72.

397. Lorsque la forme et la position du polygone funiculaire sont données, et que, par conséquent, on connaît les angles $a_{,}$, $b_{,}$, $c_{,}$, $a_{,,}$, $b_{,,}$, $c_{,,}$, etc., les équations de l'art. précédent fixent, immédiatement, les relations qui doivent exister entre les tensions des côtés, les intensités et les directions des forces, dans le cas de l'équilibre. Ces relations permettent de déterminer, arbitrairement, une partie des quantités inconnues ; ainsi, par exemple, on peut s'imposer la condition de faire éprouver, à chaque côté, une certaine tension ; alors l'intensité et la direction de la puissance $P_{(m)}$, à appliquer au sommet de l'angle connu, que j'appelle θ, formé par les côtés n^{os}. $m - 1$ et m, se déduiront des équations

$$P_{(m)} = \left\{ t^2_{(m)} - 2\, t_{(m)}\ t_{(m-1)} \cos. \theta + t^2_{(m-1)} \right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$\cos. \alpha_{(m)} = \left[t_{(m)} \cos. a_{(m)} - t_{(m-1)} \cos. a_{(m-1)} \right] : P_{(m)}$$
$$\cos. \beta_{(m)} = \left[t_{(m)} \cos. b_{(m)} - t_{(m-1)} \cos. b_{(m-1)} \right] : P_{(m)}$$
$$\cos. \gamma_{(m)} = \left[t_{(m)} \cos. c_{(m)} - t_{(m-1)} \cos. c_{(m-1)} \right] : P_{(m)}$$

lesquelles se déduisent elles mêmes, fort aisément, de celles que j'ai placées vis-à-vis l'accolade n°. m, combinées avec le théorème de l'art. 29, et un autre théorème de trigonométrie que j'ai déjà employé plusieurs fois, et qui donne le cosinus de l'angle de deux lignes, dirigées

dans l'espace, en fonction des cosinus des angles qu'elles font, avec les axes coordonnés; la forme de la valeur de $P_{(m)}$ était déjà trouvée, art. 51.

398. Si on s'impose la condition d'appliquer, aux angles du polygone donné, des forces d'intensités déterminées, il restera à trouver les directions de ces forces, et les tensions résultantes de leurs actions. Les calculs de ces quantités pourront se faire, en commençant par le 1[er] côté, et passant sucessivement, au 2[e], au 3[e], etc. On a, pour le 1[er] côté, $t_{,}=P_{,}$, $\alpha_{,}=a_{,}$, $\beta_{,}=b_{,}$, $\gamma_{,}=c_{,}$; ces valeurs étant substituées dans les équations placées vis-à-vis la 2[e] accolade, et auxquelles il faut réunir la relation $\cos.^2 \alpha_{,,} + \cos.^2 \beta_{,,} + \cos.^2 \gamma_{,,} = 1$, on aura $t_{,,}$, $\alpha_{,,}$, $\beta_{,,}$, $\gamma_{,,}$, et ces dernières valeurs substituées, à leur tour, dans les équations qui répondraient à l'accolade n°. 3, feraient connaître $t_{,,,}$, $\alpha_{,,,}$, $\beta_{,,,}$, $\gamma_{,,,}$, et ainsi de suite.

399. On pourra s'aider, dans l'analyse de quelques cas qu'on se proposerait à résoudre, des formules suivantes déduites des équations de l'art. 396; je multiplie chacune de ces équations par le cosinus de l'angle qui entre dans son deuxième membre, et je fais une somme des équations produits répondant à chaque accolade; nommant $\theta_{,}$, $\theta_{,,}$, $\theta_{,,,}$, etc. les angles respectifs formé, par le 1[er] et le 2[e] côté, le 2[e] et le 3[e] côté, le 3[e] et le 4[e], etc.; et désignant en général par $\phi_{(m)}$ l'angle formé par la direction de la force n°. m et par le côté du polygone de même numéro, les sommes dont je viens de parler fournissent les équations successives $P_{,}=t_{,}$; $t_{,}\cos.\theta_{,} + P_{,,}\cos.\phi_{,,}=t_{,,}$; $t_{,,}\cos.\theta_{,,} + P_{,,,}\cos.\phi_{,,,}=t_{,,,}$ etc, aisées à démontrer par des considérations directes.

400. Si on suppose que les forces sont données en intensités et directions, et qu'on cherche la forme et la position que le polygone doit avoir pour l'équilibre, on obtient, avec facilité, des formules pour calculer, immédiatemant, la position et la tension d'un côté quelconque, en éliminant, successivement, des équations de l'art. 396, les termes de la forme $t \cos. a$, $t \cos. b$, $t \cos. c$ qui entrent dans les premiers membres de ces équations, de manière que chacune d'elles ne renferme d'autre terme de cette forme, que celui de son second membre. Je désigne, en général, par $\Sigma_{(m)}(P \cos. \alpha)$, $\Sigma_{(m)}(P \cos. \beta)$, $\Sigma_{(m)}(P \cos. \gamma)$ les sommes $P_{,} \cos. \alpha_{,} + P_{,,} \cos. \alpha_{,,} + \text{etc.}$, $P_{,} \cos. \beta_{,} + P_{,,} \cos. \beta_{,,} + \text{etc.}$ $P_{,} \cos. \gamma_{,} + P_{,,} \cos. \gamma_{,,} + \text{etc.}$ comprenant tous les termes accentués depuis et y compris le terme n°. 1, jusqu'au terme n°. m, inclusive-

ment, et j'ai, par les éliminations successives dont je viens de parler, faites sur les équations de l'art. 396.

$$
\begin{array}{l|l|l}
\Sigma_{,}(P\cos.\alpha)=t_{,}\cos.a_{,} & \Sigma_{,}(P\cos.\beta)=t_{,}\cos.b_{,} & \Sigma_{,}(P\cos.\gamma)=t_{,}\cos.c_{,} \\
\Sigma_{,,}(P\cos.\alpha)=t_{,,}\cos a_{,,} & \Sigma_{,,}(P\cos\beta)=t_{,,}\cos b_{,,} & \Sigma_{,,}(P\cos\gamma)=t_{,,}\cos c_{,,} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\Sigma_{(m)}(P\mathrm{c}.\alpha)=t_{(m)}\mathrm{c}.a_{(m)} & \Sigma_{(m)}(P\mathrm{c}.\beta)=t_{(m)}\mathrm{c}.b_{(m)} & \Sigma_{(m)}(P\mathrm{c}.\gamma)=t_{(m)}\mathrm{c}.c_{(m)} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\Sigma_{(n)}(P\mathrm{c}.\alpha)=t_{(n)}\mathrm{c}.a_{(n)} & \Sigma_{(n)}(P\mathrm{c}.\beta)=t\,\mathrm{c}.b_{(n)} & \Sigma_{(n)}(P\mathrm{c}.\gamma)=t_{(n)}\mathrm{c}.c_{(n)} \\
\Sigma_{(n+1)}(P\cos.\alpha=0 & \Sigma_{(n+1)}(P\cos.\beta)=0 & \Sigma_{(n+1)}(P\cos.\gamma)=0
\end{array}
$$

401. Les trois dernières équations, dans lesquelles $\Sigma_{(n+1)}$, équivaut au signe Σ qui s'applique à la totalité des forces du système, répondent aux équations (a) de l'art. 346; elles seraient les seules de leur espèce, dans un système de forme invariable, mais comme, par la nature particulière du système dont nous nous occupons, il y a une infinité de combinaisons de forces qui ne lui seraient pas applicables, quoiqu'elles satisfissent aux équations (a) de l'art. cité, il faut, à ces équations, en réunir d'autres qui établissent les relations propres à caractériser les combinaisons de forces compatibles avec la nature du système.

402. Les intensités et les directions des forces étant données, la direction et la tension d'un côté quelconque du polygone funiculaire se calculent immédiatement par les trois équations de l'art. 400, qui occupent la ligne horizontale de même numéro que ce côté; le calcul est exactement le même que celui par lequel, art. 65, on obtient P, α, β et γ en fonctions de x, y et z.

403. Toutes les déterminations, relatives au polygone funiculaire, obtenues depuis l'art. 392, ne portant que sur les tensions et les directions des côtés, les intensités et les directions des forces, laissent entièrement indéterminée la longueur de chaque côté de ce polygone; ainsi lorsqu'en se donnant sa forme, sa grandeur et sa position, on a cherché, art. 397, les intensités et les directions des forces a appliquer à chacun de ses angles, pour le tenir en équilibre en conservant cette forme, les mêmes valeurs qui remplissaient ces conditions, pour le polygone donné, les auroient encore remplies, en faisant varier, arbitrairement, les longueurs des côtés, pourvu que ces côtés fussent restés toujours également tendus, et parallèles à des lignes fixes dans l'espace.

Pareillement lorsqu'on a résolu le problème inverse, en prenant, pour

données, les grandeurs et les directions des forces, les valeurs des tensions et des directions de côtés fournies par la solution, pouvaient s'appliquer à une infinité de polygones composés d'un même nombre de côtés, et ayant tous leurs côtés, de mêmes numéros, parallèles à des lignes fixes dans l'espace.

404. Lorsque les longueurs des côtés du polygone funiculaire, prises arbitrairement, ou considérées comme données du problème, sont introduites dans l'analyse, on a, dans le cas de l'art. 400, des équations pour calculer les coordonnées des points d'application des puissances (ou des sommets des angles) au moyen desquelles on peut construire les projections orthogonales de la trace du polygone, sur les plans coordonnés.

Soient $\lambda_{,}$, $\lambda_{,,}$, $\lambda_{,,,}$, etc. les longueurs respectives des côtés n°s. 1, 2, 3, etc. les projections de chacun de ces côtés, sur les axes, des x, y et z, seront

$$\lambda_{,} \cos. a_{,} \;;\; \lambda_{,} \cos. b_{,} \;;\; \lambda_{,} \cos. \gamma_{,}$$
$$\lambda_{,,} \cos. a_{,,} \;;\; \lambda_{,,} \cos. b_{,,} \;;\; \lambda_{,,} \cos. \gamma_{,,}$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

Ainsi nommant $x_{(m)}$, $y_{(m)}$, $z_{(m)}$ les coordonnées du point n°. m, les valeurs de ces coordonnées sont, en désignant par $\rho_{,}$, $\sigma_{,}$, $\tau_{,}$, les coordonnées du point n°. 1, respectivement parallèles aux x, y et z

$$\left.\begin{aligned} x_{(m)} &= \Sigma_{(m-1)}\,(\lambda \cos. a) + \rho_{,} \\ y_{(m)} &= \Sigma_{(m-1)}\,(\lambda \cos. b) + \sigma_{,} \\ z_{(m)} &= \Sigma_{(m-1)}\,(\lambda \cos. c) + \tau_{,} \end{aligned}\right\}$$

Observez que le point, n°. m, se trouve à l'extrémité du côté n° $m-1$.

(voyez, pour la notation les art. 394 et 400) les valeurs des quantités $\lambda \cos. a$, $\lambda \cos. b$, $\lambda \cos. c$ sont connues lorsqu'on a calculé les valeurs de $\cos. a$, $\cos. b$ et $\cos. c$, par les équations de l'art. 400.

405. Les 13 articles précédents renferment tout ce qui est nécessaire pour la solution des problèmes relatifs à l'équilibre des polygones funiculaires *libres*, sollicités par des puissances appliquées à des nœuds fixes sur ce polygone; cependant je crois qu'il sera utile de faire voir comment on peut substituer aux équations de l'art. 396 d'autres équations, qui ne renferment pas les tensions, et au moyen desquelles ont puisse construire le polygone lorsque les forces qui doivent être en équilibre sont données; l'analyse que je vais présenter rendra très-sensible l'influence qu'ont, sur l'équilibre, les *conditions* auxquelles le système de forme variable est assujetti.

Soient

Soient $\lambda_{,}$, $\lambda_{,,}$, $\lambda_{,,,}$, les longueurs connues de trois côtés consécutifs quelconques du polygone, et $t_{,}$, $t_{,,}$, $t_{,,,}$ leurs tensions respectives; je désigne par $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, les coordonnées de l'origine de $\lambda_{,}$, par $x_{,,}$, $y_{,,}$, $z_{,,}$, celles de son point de réunion avec $\lambda_{,,}$, par $x_{,,,}$, $y_{,,,}$, $z_{,,,}$, celles du point de réunion de $\lambda_{,,}$, et $\lambda_{,,,}$, enfin par $x_{,,,,}$, $y_{,,,,}$, $z_{,,,,}$, celles de l'extrémité de $\lambda_{,,,}$; j'appelle $P_{,,}$, et $P_{,,,}$, respectivement, les forces appliquées aux points dont les coordonnés sont $x_{,,}, y_{,,}, z_{,,}; x_{,,,}, y_{,,,}, z_{,,,}$; enfin les angles respectifs formés par les directions de $P_{,,}$ et $P_{,,,}$, avec les axes coordonnés, sont $\alpha_{,,}$, $\beta_{,,}$, $\gamma_{,,}$; $\alpha_{,,,}$, $\beta_{,,,}$, $\gamma_{,,,}$.

Observant que les cosinus des angles formés par le côté $\lambda_{,}$, avec les axes des x, y et z, sont $\frac{x_{,,}-x_{,}}{\lambda_{,}}$, $\frac{y_{,,}-y_{,}}{\lambda_{,}}$, $\frac{z_{,,}-z_{,}}{\lambda_{,}}$, qu'on a des expressions pareilles pour les deux autres côtés, et substituant ces valeurs dans deux des groupes consécutifs, liés par des accolades, des équations de l'art. 396, le résultat de la substitution donne les six équations

$$(a) \ldots \left\{ \begin{aligned}
&\frac{x_{,,}-x_{,}}{\lambda_{,}}\, t_{,} + P_{,,} \cos. \alpha_{,,} - \frac{x_{,,,}-x_{,,}}{\lambda_{,,}}\, t_{,,} = 0 \\
&\frac{y_{,,}-y_{,}}{\lambda_{,}}\, t_{,} + P_{,,} \cos. \beta_{,,} - \frac{y_{,,,}-y_{,,}}{\lambda_{,,}}\, t_{,,} = 0 \\
&\frac{z_{,,}-z_{,}}{\lambda_{,}}\, t_{,} + P_{,,} \cos. \gamma_{,,} - \frac{z_{,,,}-z_{,,}}{\lambda_{,,}}\, t_{,,} = 0 \\
&\frac{x_{,,,}-x_{,,}}{\lambda_{,,}}\, t_{,,} + P_{,,,} \cos. \alpha_{,,,} - \frac{x_{,,,,}-x_{,,,}}{\lambda_{,,,}}\, t_{,,,} = 0 \\
&\frac{y_{,,,}-y_{,,}}{\lambda_{,,}}\, t_{,,} + P_{,,,} \cos. \beta_{,,,} - \frac{y_{,,,,}-y_{,,,}}{\lambda_{,,,}}\, t_{,,,} = 0 \\
&\frac{z_{,,,}-z_{,,}}{\lambda_{,,}}\, t_{,,} + P_{,,,} \cos. \gamma_{,,,} - \frac{z_{,,,,}-z_{,,,}}{\lambda_{,,,}}\, t_{,,,} = 0
\end{aligned} \right.$$

pour obtenir des équations délivrées des tensions $t_{,}$, $t_{,,}$, $t_{,,,}$, on éliminera d'abord $\frac{t_{,}}{\lambda_{,}}$ entre la 1ᵉ et la 2ᵉ, et $\frac{t_{,,,}}{\lambda_{,,,}}$ entre la 4ᵉ et la 5ᵉ, ensuite $\frac{t_{,,}}{\lambda_{,,}}$ entre les deux équations résultantes de ces deux éliminations, et faisant ensuite les mêmes opérations sur les 1ᵉ, 3ᵉ, 5ᵉ et 6ᵉ, on aura ultérieurement les deux équations

$$(\beta) \ldots \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} P_{\prime\prime} \Big\{ \dfrac{y_{\prime\prime}-y_{\prime}}{x_{\prime\prime}-x_{\prime}} \cos. \alpha_{\prime\prime} - \cos. \beta_{\prime\prime} \Big\{ \left(\dfrac{y_{\prime\prime\prime\prime}-y_{\prime\prime\prime}}{x_{\prime\prime\prime\prime}-x_{\prime\prime\prime}} - \dfrac{y_{\prime\prime\prime}-y_{\prime\prime}}{x_{\prime\prime\prime}-x_{\prime\prime}} \right) \\ + P_{\prime\prime\prime} \Big\{ \dfrac{y_{\prime\prime\prime\prime}-y_{\prime\prime\prime}}{x_{\prime\prime\prime\prime}-x_{\prime\prime\prime}} \cos. \alpha_{\prime\prime\prime} - \cos. \beta_{\prime\prime\prime} \Big\{ \left(\dfrac{y_{\prime\prime}-y_{\prime}}{x_{\prime\prime}-x_{\prime}} - \dfrac{y_{\prime\prime\prime}-y_{\prime\prime}}{x_{\prime\prime\prime}-x_{\prime\prime}} \right) \end{array} \right\} = 0 \\ \left. \begin{array}{l} P_{\prime\prime} \Big\{ \dfrac{z_{\prime\prime}-z_{\prime}}{x_{\prime\prime}-x_{\prime}} \cos. \alpha_{\prime\prime} - \cos. \gamma_{\prime\prime} \Big\{ \left(\dfrac{z_{\prime\prime\prime\prime}-z_{\prime\prime\prime}}{x_{\prime\prime\prime\prime}-x_{\prime\prime\prime}} - \dfrac{z_{\prime\prime\prime}-z_{\prime\prime}}{x_{\prime\prime\prime}-x_{\prime\prime}} \right) \\ + P_{\prime\prime\prime} \Big\{ \dfrac{z_{\prime\prime\prime\prime}-z_{\prime\prime\prime}}{x_{\prime\prime\prime\prime}-x_{\prime\prime\prime}} \cos. \alpha_{\prime\prime} - \cos. \gamma_{\prime\prime} \Big\{ \left(\dfrac{z_{\prime\prime}-z_{\prime}}{x_{\prime\prime}-x_{\prime}} - \dfrac{z_{\prime\prime\prime}-z_{\prime\prime}}{x_{\prime\prime\prime}-x_{\prime\prime}} \right) \end{array} \right\} = 0 \end{array} \right.$$

L'application de ces équations commençant au 2e. côté et se terminant à l'avant-dernier, on en a $2(n-2)$, pour l'étendue entière du système, n étant le nombre des côtés; on a, pour le 1er côté les équations particulières

$$(\beta) \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{y_{\prime}-\sigma_{\prime}}{x_{\prime}-\rho_{\prime}} \cos. \alpha' - \cos. \beta_{\prime} = 0 \\ \dfrac{z_{\prime}-\tau_{\prime}}{x_{\prime}-\rho_{\prime}} \cos. \alpha_{\prime} - \cos. \gamma' = 0 \end{array} \right.$$

$\rho_{\prime}, \sigma_{\prime}, \tau_{\prime}, x_{\prime}, y_{\prime}, z_{\prime}, \alpha_{\prime}, \beta_{\prime}, \gamma_{\prime}$, étant, respectivement, les coordonnées de l'origine et de l'extrémité de ce 1er côté, et les angles formés par la force qui le tient tendu et par les x, y et z; on a, de plus, deux équations pareilles pour le dernier côté, et, enfin, un nombre n d'équations de la forme

$$(\gamma) \ldots\ldots \lambda^2 = (x_{\prime}-x)^2 + (y_{\prime}-y)^2 + (z_{\prime}-z)^2$$

applicables aux côtés du polygone, depuis et y compris le 1er, jusqu'au dernier inclusivement, et qui sont, art. 391, les équations de condition du système.

On obtient donc, ainsi, en totalité, $3n$ équations qui renferment les coordonnées des points d'application des forces, indépendamment des équations

$$(\delta) \ldots\ldots \Sigma(P \cos. \alpha) = 0 \,;\; \Sigma(P \cos. \beta) = 0 \,;\; \Sigma(P \cos. \gamma) = 0$$

qui ne renferment que les forces et leurs directions; or le nombre total des coordonnées des points d'applications est $3(n+1)$; mais le 1er point du système peut être supposé donné de position, et le nombre des coordonnées, qu'on doit regarder comme inconnues, se réduit à $3n$ le même que celui des équations qui, dans l'étendue entière du système, déterminent les valeurs de ces inconnues.

406. Lorsque le polygone est donné et qu'on cherche les forces à appliquer à ses extrémités et aux sommets de ses angles pour le tenir en

équilibre sans changer sa forme ni sa position, les inconnues sont $n+1$ forces et $3(n+1)$ angles, formés par les directions de ces forces et par les axes coordonnés, en tout $4(n+1)$ inconnues; mais le problème est indéterminé, et on peut, par exemple, prendre, arbitrairement, les intensités de n forces; il reste à connaître une force et $3(n+1)$ angles, ou $1+3(n+1)$ inconnues, dont six se déterminent, déjà, par l'identité des directions de la première force et du premier côté, de la dernière force et du dernier côté; il en reste $1+3(n-1)$, pour lesquelles on a les $2(n-2)$ équations (δ) et les trois équations (∂) de l'article précédent, et $n+1$ équations de la forme

$$\cos^2\gamma_{,}+\cos^2\delta+\cos^2\gamma=1$$

qui se réduisent à $n-1$, vu que deux de ces équations se rapportent à la première et à la dernière force, dont les directions sont déterminées, en sorte que le nombre des équations a employer $=2(n-2)+3+(n-1)=1+3(n-1)=$ le nombre des inconnues.

407. Les équations (δ) de l'art. 405 pourraient se combiner et se transformer, de différentes manières, pour la facilité du calcul, et fournir matière à plusieurs observations que je supprime pour abréger; on peut s'en servir, par exemple, pour démontrer l'existence de l'équilibre des polygones funiculaires plans, qui seraient les projections orthogonales, sur les plans coordonnés, du polygone auquel ces équations se rapportent, et sollicités par des forces égales aux composantes de $P_{,}$, $P_{,,}$, prises paparallèlement aux plans coordonnés etc; on y retrouve les *moments* des forces, elles offrent le moyen le plus direct de passer du polygone à la courbe funiculaire à double courbure etc. etc.

Le polygone funiculaire est supposé avoir un ou deux points fixes dans l'espace.

408. Examinons maintenant le cas où le système a des points fixes dans l'espace, et commençons par supposer que le point n°. 1, placé à l'origine de la trace du polygone, est seul immobile.

Dans ce cas, nommant $T_{,}$ la tenssion du côté n°. 1, celui qui est attaché au point fixe, et $A_{,}$, $B_{,}$, $C_{,}$, les angles respectifs que forme sa direction avec les axes des x, y et z, les quantités $T_{,}$, $A_{,}$, $B_{,}$, $C_{,}$, remplacent celles qui ont été désignées, art. 396 et 400, par $P_{,}$, $\alpha_{,}$, $\delta_{,}$, $\gamma_{,}$, mais elles sont inconnues et il faut d'abord les déterminer, lorsqu'on

veut construire le polygone qui, sollicité par des forces données en intensité et directions, serait en équilibre.

On a, art. 400 et 405, pour cette détermination, les équations

$$T_{,} \cos. A_{,} = \Sigma (P \cos. \alpha)$$
$$T_{,} \cos. B_{,} = \Sigma (P \cos. \beta)$$
$$T_{,} \cos. C_{,} = \Sigma (P \cos. \gamma)$$
$$\cos.^2 A_{,} + \cos.^2 B_{,} + \cos.^2 C_{,} = 1$$

Les sommes des deuxièmes membres des trois premières équations, embrassent les termes relatifs à la totalité des forces, depuis la force qui est appliquée au point n°. 2, celui qui sépare le 1er et le 2e côté, jusqu'à la force appliquée au point n°. $n+1$, ou au derniet poinr du systême.

Lorsque les quantités $T_{,}, A_{,}, B_{,}, C_{,}$, sont calculées, par les équations précédentes, on les substitue dans les équations des art. 396, 400 ou 405, aux quantités $P_{,}, \alpha_{,}, \beta_{,}, \gamma_{,}$, et les autres déterminations relatives à la consruction du polygone, se font, alors, comme si le système était libre.

409. Supposons maintenant que le premier et le dernier point du polygone sont fixes dans l'espace, et que les forces appliquées aux autres points et leurs directions sont données; conservant à $T_{,}, A_{,}, B_{,}, C_{,}$, les mêmes significations qu'à l'article précédent, et désignant par $T_{,,}$, $A_{,,}, B_{,,}, C_{,,}$, la tension du dernier côté et les angles respectifs qu'il fait avec les axes des x, y et z, ces quantités $A_{,,}, B_{,,}, C_{,,}, T_{,,}$, représenteront $\alpha_{(n+1)}, \beta_{(n+1)}, \gamma_{(n+1)}, P_{(n+1)}$, des équations de l'art. 400, comme $A_{,}, B_{,}, C_{,}, T_{,}$, représentent $\alpha_{,}, \beta_{,}, \gamma_{,}, P_{,}$, et on aura huit inconnues $A_{,}, B_{,}, C_{,}, T_{,}$; $A_{,,}, B_{,,}, C_{,,}, T_{,,}$, à déterminer.

Ces huit inconues et les $3(n-2)$ ordonnées des points d'applications des forces, compris entre le premier et le dernier point fixes, forment un total de $8+3(n-2)$ ou $3(n+1)-1$ valeurs à trouver. On a, pour les déterminer, d'abord les trois équations suivantes, qui expriment l'égalité à zéro de la somme des composantes parallèles à chacun des axes coordonnés

$$(s) \ldots \left\{ \begin{array}{l} T_{,} \cos. A_{,} + T_{,,} \cos. A_{,,} + \Sigma (P \cos. \alpha) = 0 \\ T_{,} \cos. B_{,} + T_{,,} \cos. B_{,,} + \Sigma (P \cos. \beta) = 0 \\ T_{,} \cos. C_{,} + T_{,,} \cos. C_{,,} + \Sigma (P \cos. \gamma) = 0 \end{array} \right.$$

(Le signe Σ comprend toutes les quantités qui se rapportent au 2e 3e etc. point jusqu'à l'avant-dernier, inclusivement.)

ensuite trois autres équations qui expriment que la différence entre les

coordonnées, rapportées à un même axe, du premier et du dernier point, est égale à la somme des projections orthogonales de tous les côtés, sur cet axe. $L_{,}$ et $L_{,,}$ sont, respectivement, les longueurs données du premier et du dernier côté, ρ', $\sigma_{,}$, $\tau_{,}$; $\rho_{,,}$, $\sigma_{,,}$, $\tau_{,,}$, sont les coordonnées du premier et du dernier point, respectivement parallèles aux x, y et z

$$(t)\ldots\begin{cases}\rho_{,,}-\rho_{,}=L_{,}\cos.A_{,}+L_{,,}\cos.A_{,,}+\Sigma(x_{,}-x)\\ \sigma_{,,}-\sigma_{,}=L_{,}\cos.B_{,}+L_{,,}\cos.B_{,,}+\Sigma(y_{,}-y)\\ \tau_{,,}-\tau_{,}=L_{,}\cos.C_{,}+L_{,,}\cos.C_{,,}+\Sigma(z_{,}-z)\end{cases}$$

Le signe Σ comprend les sommes des projections, depuis, et y compris celle du 2e. côté jusqu'à celle de l'avant-dernier côté, inclusivemt.

enfin on a les deux équations

$$(u)\ldots\ldots\begin{cases}\cos.^2 A_{,}+\cos.^2 B_{,}+\cos.^2 C_{,}=1\\ \cos.^2 A_{,,}+\cos.^2 B_{,,}+\cos.^2 C_{,,}=1\end{cases}$$

Voilà 8 équations qui renferment, outre les 8 inconnues $A_{,}$, $B_{,}$, $C_{,}$, $T_{,}$, $A_{,,}$, $B_{,,}$, $C_{,,}$, $T_{,}$, $T_{,,}$, un nombre $3(n-2)$ d'autres inconnues, comprises dans les sommes $\Sigma(x_{,}-x)$, $\Sigma(y_{,}-y)$, $\Sigma(z_{,}-z)$, mais on a, relativement à ces dernières, les équations (δ) de l'article 405, dont l'application doit commencer au 2e côté et se terminer à l'avant-dernier inclusivement, et qui étant combinées avec les équations (s), (t) et (u), fourniront toutes les ressources analytiques nécessaires pour la détermination des $8+3(n-2)$ ou $3(n+1)-1$ inconnues.

Plusieurs des forces en équilibre, sur le polygone funiculaire, sont appliquées à des *anneaux* mobiles dans le sens du périmètre de ce polygone.

410. Il reste à examiner le cas où quelques unes des puissances en équilibre sur le polygone funiculaire, sont appliquées à des *anneaux* pouvant glisser dans le sens de la longueur du cordon qui les traverse. On a vu, art. 390, que les tensions des deux côtés séparés par chacun de ces anneaux devaient êtres égales entr'elles; et si, entre deux *nœuds*, ou entre deux point d'application des forces, fixes sur le cordon, il y a plusieurs *anneaux* ou points d'application mobiles, des forces, la tension sera constante d'un de ces nœuds à l'autre; ensuite, si on fait attention que, lorsque le système est en équilibre, une force appliquée, à un point, ou sommet d'angle, du polygone funiculaire, a la même intensité

et se trouve dirigée sur la même ligne que la résultante des tensions des deux côtés adjacents à cet angle, on verra que ce même angle doit être partagé, en deux parties égales, par la direction de la force appliquée à un anneau mobile, qui occupe son sommet, puisque les tensions sont égales de part et d'autre de l'anneau, et que la résultante de deux forces égales doit faire le même angle avec chacune d'elles.

Ces considérations vont me fournir les moyens d'ajouter aux conditions générales d'équilibre, données précédemment, l'expression analytique des conditions particulières que comporte le cas dont je m'occuppe en ce moment.

411. *Soit* k le nombre des côtés séparés par $k-1$ anneaux mobiles, entre deux nœuds ou points fixes sur le polygone; désignons par $\lambda_{(m)}$ la somme des longueurs de ces côtés, ou la longueur totale, connue, de la portion de cordon comprise entre les deux points fixes; par λ', λ'', etc, $\lambda^{(k)}$, les longueurs particulières et inconnues de chacun des côtés qui la composent; par $x_{(m)}$, $y_{(m)}$ et $z_{(m)}$ les coordonnées du premier nœud, ou point fixe, de celui qui est le plus près de l'origine du polygone, dans le sens du périmètre; par x', y', z'; x'', y'', z''; etc, les coordonnées des anneaux compris entre ce premier point fixe et le second, enfin par α', β', γ'; α'', β'', γ''; etc. les angles que font, avec les axes des x, y et z les directions des puissances appliquées à ces anneaux.

L'équilibre du système étant supposé établi, les équations (δ), de l'art. 405, seront indistinctement applicables aux points fixes et aux points ou anneaux mobiles, et auront lieu dans le système, comme si tous les points étaient fixes; les équations de la forme $\lambda^2=(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2$ auront aussi lieu sur l'étendue entière du système, mais celles de ces équations qui se rapporteront aux côtés λ', λ'', etc. $\lambda^{(k)}$, devront être combinées avec l'équation de condition $\lambda'+\lambda''+\ldots+\lambda^{(k)}=\lambda_{(m)}$ qui est la seconde de l'art. 391.

Il faut, de plus, avoir un nombre $k-1$ d'équations, à ajouter à la précédente, pour compléter le nombre total de celles dont on a besoin, eu égard à l'introduction des nouvelles inconnues λ', λ'', ... $\lambda^{(k)}$, et ces $k-1$ équations sont fournies par la condition de l'égalité des angles formés par chaque puissance P', P'', etc. avec les cotés placés de part et d'autre de l'anneau auquel elle est appliquée, condition qui donne,

$$(\lambda)\ldots\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{x''-x'}{\lambda''}-\frac{x'-x_{(m)}}{\lambda'}\right)\cos\alpha'+\left(\frac{y''-y'}{\lambda''}-\frac{y'-y_{(m)}}{\lambda'}\right)\cos 6'+\left(\frac{z''-z'}{\lambda''}-\frac{z'-z_{(m)}}{\lambda'}\right)\cos.\gamma'=0\\ \left(\frac{x'''-x''}{\lambda'''}-\frac{x''-x'}{\lambda''}\right)\cos\alpha''+\left(\frac{y'''-y''}{\lambda'''}-\frac{y''-y'}{\lambda''}\right)c.6'+\left(\frac{z'''-z''}{\lambda'''}-\frac{z''-z'}{\lambda''}\right)\cos.\gamma''=0\end{array}\right.$$

etc.

On a chacune de ces équations en égalant, entr'eux, deux termes de la forme $\frac{x'-x}{\lambda'}\cos.\alpha' + \frac{y'-y}{\lambda'}\cos.6' + \frac{z'-z}{\lambda'}\cos.\gamma'$ et

$\frac{x''-x'}{\lambda''}\cos.\alpha' + \frac{y''-y'}{\lambda''}\cos.6' + \frac{z''-z'}{\lambda''}\cos.\gamma'$ qui sont, d'après le théorème connu de trigonométrie, les expressions des cosinu des angles formés par la puissance appliquée à l'*anneau* dont les coordonnées x', y', z' déterminent la position, et par les côtés λ' et λ'' placés de part et d'autre de cet anneau.

412. Je ferai, en achevant ce que j'avais à dire sur cette matière, un rapprochement entre les résultats de l'analyse précédente, et les propositions des art. 337, 338 et 90. D'après l'art. 337 l'équilibre du polygône doit encore subsister après qu'on a rendu fixe, dans l'espace, un nombre arbitraire de points de ce polygone; on peut donc supposer que tous ceux de ses points, auxquels se trouvent des sommets d'angles, sont immobiles dans l'espace, à l'exception d'un seul où serait placé un *anneau*, et, art. 338, si cet anneau, resté seul mobile, devait prendre du mouvement, il faudrait en conclure que l'équilibre n'existait pas, avant qu'on eut fixé les autres points; mais, art. 90, l'anneau, dont il s'agit, ne peut être sans tendance à se déplacer qu'autant que la puissance, qui le soilicite, est perpendiculaire à la surface courbe sur laquelle il est assujetti à se mouvoir; cette surface courbe est celle d'une ellipsoïde de révolution, ayant un de ses axes égal à la portion de cordon comprise entre les deux points fixes placés de part et d'autre de l'anneau, ces points fixes pour foyers, et on exprime que la direction de la puissance est normale à cette même surface, en posant une équation de même forme qu'une des équations (λ) de l'art. précédent.

413. Connaissant la longueur du cordon attaché aux deux points fixes, et la direction de la puissance appliquée à l'anneau que ce cordon traverse, on détermine, graphiquement, avec beaucoup de facilité, la po-

sition de cet anneau, dans le plan qui renferme les points fixes, le cordon et la direction de la puissance. Soient A et B les points fixes, menant AQ et BR parallèles à la direction de la puissance, décrivant des points A et B, comme centres, et d'un rayon égal à la longueur du cordon, les arcs de cercle $a\,a\,a'$ et $6\,b\,6'$, qui coupent BR et AQ en a et b, et menant les droites Aa et Bb, le point d'intersection C, de ces droites, sera le point cherché.

Fg. 16

Passage du polygone funiculaire à la courbe.

414. Il est souvent utile, dans la recherche des conditions de l'équilibre, ou des lois du mouvement, d'un système composé d'un nombre indéfini de points, séparés les uns des autres, et liés, entr'eux, d'une manière quelconque, de disposer l'analyse de manière à pouvoir y introduire immédiatement, la condition de la *continuité*, ou de l'état qu'acquiert le système, lorsque, par la multiplication, à l'infini, du nombre de ses points, dans un espace fini, on rapproche ces points de manière qu'ils forment un corps *continu*. Des géomètres du premier ordre ont appliqué cette méthode, avec le plus grand succès, à des questions importantes, et la théorie de l'équilibre du polygone funiculaire me fournit le moyen d'en donner un exemple digne d'attention.

Si on veut passer du polygone à la courbe dans le cas le plus général, c'est-à-dire en supposant que les forces, appliquées au système, agissent dans des plans différents, ce qui donne une courbe à double courbure, les équations (6) de l'art. 405 deviendront, immédiatement, les équations différentielles des projections de la courbe sur le plan xy et sur le plan xz, en considérant $x_{,}$, $x_{,,}$, $x_{,,,}$, $x_{,,,,}$; $y_{,}$, $y_{,,}$ $y_{,,,}$, $y_{,,,,}$; $z_{,}$, $z_{,,}$, $z_{,,,}$, $z_{,,,,}$ comme les coordonnées de quatre points de la courbe infiniment voisins les uns des autres, et on aura, en supprimant deux accents aux puissances et à leurs angles avec les axes, et un accent aux coordonnées, l'ordre de succession de ces quantités pouvant être indiqué sans équivoque par les accents qui resteront.

$$P\left(\frac{dy}{dx}-\frac{\cos.6}{\cos.\alpha}\right)d\left(\frac{dy_{,}}{dx_{,}}\right)\cos\alpha-P_{,}\left(\frac{dy_{,,}}{dx_{,,}}-\frac{\cos.6_{,}}{\cos.\alpha_{,}}\right)d\left(\frac{dy}{dx}\right)\cos.\alpha_{,}=0$$

$$P\left(\frac{dz}{dx}-\frac{\cos.\gamma}{\cos.\alpha}\right)d\left(\frac{dz_{,}}{dx_{,}}\right)\cos.\alpha-P_{,}\left(\frac{dz_{,,}}{dx_{,,}}-\frac{\cos.\gamma_{,}}{\cos.\alpha_{,}}\right)d\left(\frac{dz}{dx}\right)\cos.\alpha_{,}=0$$

ces

ces équations se ramènent aux quantités et aux différences sans accents, en observant qu'on a $P_{,}=P+dP$; $x_{,}=x+dx$; $dx_{,}=dx+ddx$; $dx_{,,}=dx_{,}+ddx_{,}=dx+2ddx+d^3x$ et ainsi des autres.

415. Designant par η l'angle que fait, avec l'axe des x, la projection orthogonale de la direction de P sur le plan xy, on a

$$\cos. \alpha = \cos. \eta \sin. \gamma \; ; \; \frac{\cos. \mathcal{6}}{\cos. \alpha} = \frac{\sin. \eta}{\cos. \eta}$$

et la première équation de l'article précédent, devient, en faisant $P \sin. \gamma = \Pi$

$$\Pi \cos. \eta \left(\frac{dy}{dx} - \frac{\sin. \eta}{\cos. \eta}\right) d\left(\frac{dy_{,}}{dx_{,}}\right) - \Pi_{,} \cos. \eta_{,} \left(\frac{dy_{,,}}{dx_{,,}} - \frac{\sin. \eta_{,}}{\cos. \eta_{,}}\right) d\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

Cette équation est celle à laquelle on parviendrait si on voulait exprimer les conditions de l'équilibre entre les forces Π agissant, dans le plan xy où elles feraient des angles η avec l'axe des x, sur une courbe funiculaire qui serait la projection orthogonale, sur le même plan, de celle à laquelle les forces P sont appliquées. Ces forces Π, ou $P \sin. \gamma$, sont les composantes des forces P parallèles aux plan xy ; et tout ce que je viens de dire relativement au plan xy, peut s'appliquer au plan xz, car d'après la 2e. équation de l'art. 414, on obtiendra, relativement à ce plan, une équation de même forme que la précédente, et qu'on aurait pu en déduire, en y substituant, z à y, $P \sin. \mathcal{6}$ à $P \sin. \gamma$, et l'angle formé par l'axe des x et par la composante $P \sin. \mathcal{6}$, à l'angle que forme le même axe avec la composante $P \sin. \gamma$: ces observations se rapportent à ce que j'ai dit, art. 407.

416. On voit, par-là, qu'en considérant à part chacune des équations qui expriment les conditions de l'équilibre d'un polygone ou d'une courbe funiculaire, sollicités par des forces dirigées dans différents plans, les opérations analytiques que cette équation comporte, sont les mêmes qu'on aurait à faire dans le cas où les forces agiraient dans un même plan, et où, par conséquent, la courbe funiculaire serait une courbe plane. Il suffit donc de traiter ce dernier cas, et pour en faire, autant qu'il est possible, un exercice utile aux élèves, je vais chercher, par des considérations immédiates, les conditions de l'équilibre du polygone funiculaire plan, ce qui me conduira à une démonstration de l'équation précédente, indépendante de celle des équations de l'art. 414, dont elle est déduite.

417. Soient, dans l'hypothèse du polygone funiculaire plan, a, $a_{,}$ et $a_{,,}$ les angles formés par trois de ses côtés consécutifs et par l'axe des x, lequel est tracé sur le plan qui renferme les côtés du polygone et les directions des forces ; nommons t, $t_{,}$ et $t_{,,}$ les tensions respectives de ces côtés ; P et $P_{,}$ les puissances appliquées aux points qui réunissent le 1er au 2e, et le 2e au 3e ; α et $\alpha_{,}$ les angles que les directions de ces puissances font avec l'axe des x.

L'équilibre absolu de celui de ces trois côtés qui est entre les deux autres exige, 1°. que la somme des composantes des forces qui agissent dans le sens de sa longueur, provenant de P, t, $P_{,}$ et $t_{,,}$, soit nulle ; 2°, que les sommes des composantes perpendiculaires à cette longueur, provenant, d'une part, de P et t, d'une autre part, de $P_{,}$ et $t_{,,}$ soient nulles chacune en particulier.

Ces conditions sont exprimées par les équations

$$t\cos.(a-a_{,})+P\cos.(a_{,}-\alpha)=t_{,,}\cos.(a_{,,}-a_{,})+P_{,}\cos.(a_{,}-\alpha_{,})$$

$$t\sin.(a-a_{,})=P\sin.(a_{,}-\alpha)\ ;\ t_{,,}\sin.(a_{,,}-a_{,})=P_{,}\sin.(a_{,}-\alpha_{,})$$

418. Éliminant t et $t_{,,}$ entre ces trois équations, et réduisant par les théorêmes connus de trigonométrie, on a l'équation suivante qui exprime les conditions de l'équilibre absolu d'un côté quelconque du polygone.

$$P\sin.(a_{,,}-a_{,})\sin.(a-\alpha)=P_{,}\sin.(a_{,}-\alpha)\sin.(a_{,,}-\alpha_{,})$$

419. Les raisonnements des art. 408 et suivant, relatifs aux cas d'un ou de deux points fixes, dans le système, à ceux où quelques-unes des forces agissent sur des anneaux mobiles, etc. s'appliquent d'eux-mêmes à l'équation précédente, et il serait superflu de les répéter ici.

420. L'équation de l'art. 418 aurait pu s'obtenir, immédiatement, par le théorême de l'art. 50, en considérant $t_{,}$ comme la résultante de P et de t, d'une part, de $P_{,}$ et de $t_{,,}$ de l'autre ; formant, d'après le théorême cité, les deux proportions

$$t_{,}:P::\sin.(a-\alpha):\sin.(a_{,}-a)$$

$$t_{,}:P_{,}::\sin.(a_{,,}-\alpha_{,}):\sin.(a_{,,}-a_{,})$$

et éliminant $t_{,}$ entre les équations que ces proportions fournissent. Cette manière d'obtenir l'équation finale, quoique plus simple et aussi rigoureuse que celle de l'art. 418, ne met pas dans une aussi parfaite évi-

dence les équilibres partiels qui assurent l'équilibre absolu dont on cherche les conditions.

421. Il est aisé de voir comment cette équation de l'art. 418, obtenue par des considérations immédiates, est la même que celle qu'on aurait déduit de l'équation de l'art. 415, où Π et η représentent P et α ; développant les sinus des différences d'arcs, l'équation de l'art. 418, prend la forme

$$\left.\begin{array}{l} P\cos.\alpha\left(\dfrac{\sin.a}{\cos.a}-\dfrac{\sin.\alpha}{\cos.\alpha}\right)\left(\dfrac{\sin.a_{\prime\prime}}{\cos.a_{\prime\prime}}-\dfrac{\sin.a_{\prime}}{\cos.a_{\prime}}\right) \\ -P_{\prime}\cos.\alpha_{\prime}\left(\dfrac{\sin.a_{\prime\prime}}{\cos.a_{\prime\prime}}-\dfrac{\sin.\alpha_{\prime}}{\cos.\alpha_{\prime}}\right)\left(\dfrac{\sin.a_{\prime}}{\cos.a_{\prime}}-\dfrac{\sin.a}{\cos.a}\right)\end{array}\right\}=0$$

introduisant dans cette équation, applicable indistinctement, au polygone et à la courbe, les conditions qui caractérisent la courbe, on a,

$$\frac{\sin.a}{\cos.a}=\frac{dy}{dx},\quad \frac{\sin.a_{\prime}}{\cos.a_{\prime}}=\frac{dy_{\prime}}{dx_{\prime}},\quad \frac{\sin.a_{\prime\prime}}{\cos.a_{\prime\prime}}=\frac{dy_{\prime\prime}}{dx_{\prime\prime}};$$

$\dfrac{dy_{\prime\prime}}{dx_{\prime\prime}}-\dfrac{dy_{\prime}}{dx_{\prime}}=d\left(\dfrac{dy_{\prime}}{dx_{\prime}}\right)$; $\dfrac{dy_{\prime}}{dx_{\prime}}-\dfrac{dy}{dx}=d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ et la substitution de ces valeurs, redonne l'équation de l'art. 415, en remplaçant P et α par Π et η.

422. Pour arriver aux expressions analytiques les plus commodes, relativement aux conséquences à tirer de la théorie précédente, je mets l'équation de l'art. 418 sous la forme

$$\left.\begin{array}{l} P_{\prime}\,(\sin.a_{\prime\prime}\cos.\alpha_{\prime}-\cos.a_{\prime\prime}\sin.\alpha_{\prime})\sin.(a_{\prime}-a) \\ -P\,(\sin.a\cos.\alpha-\cos.a\sin.\alpha)\sin.(a_{\prime\prime}-a_{\prime})\end{array}\right\}=0$$

423. Passant du polygone à la courbe, supposant ds constant, et désignant par r et $r_{\prime}$, les rayons de courbure menés aux points d'application des forces P et $P_{\prime}$, on a

$$\sin.a=\frac{dy}{ds};\ \cos.a=\frac{dx}{ds};\ \sin.a_{\prime\prime}=\frac{dy_{\prime\prime}}{ds};\ \cos.a_{\prime\prime}=\frac{dx_{\prime\prime}}{ds};$$

$$\sin.(a_{\prime}-a)=\frac{ds}{r};\ \sin.(a_{\prime\prime}-a_{\prime})=\frac{ds}{r_{\prime}}.$$

et ces valeurs, substituées dans l'équation de l'article précédent, la changent en

$$(1)\ldots P_{,}r_{,}(dy_{,,}\cos. a_{,}-dx_{,,}\sin. a_{,})-Pr(dy\cos. a-dx\sin. a)=0$$

Le premier terme du premier membre est l'équivalent de l'expression

$$P_{,}r_{,}(dy_{,}\cos. a_{,}-dx_{,}\sin. a_{,})+P_{,}r_{,}(ddy_{,}\cos. a_{,}-ddx_{,}\sin a_{,})$$

laquelle étant introduite dans (1), donne, en observant que, d'après la condition de la *continuité*, l'excès d'une fonction où tout est marqué d'un accent, sur la même fonction, sans accent, égale la différentielle de cette dernière fonction

$$(2)\ldots d\{Pr(dy\cos a-dx\sin. a)\}+P_{,}r_{,}(ddy_{,}\cos a_{,}-ddx_{,}\sin. a_{,})=0$$

424. $P_{,}r_{,}=Pr+d(Pr)$; $ddy_{,}\cos. a_{,}=ddy\cos. a+d(ddy\cos. a)$; $ddx_{,}\sin. a_{,}=ddx\sin. a+d(ddx\sin. a)$; substituant ces valeurs dans l'équation (2) de l'article précédent et ne conservant que les termes du 2ᵉ. ordre, on obtient finalement

$$d\{Pr(dy\cos. a-dx\sin. a)\}+Pr(ddy\cos. a-ddx\sin. a)=0$$

425. On a, par la théorie des courbes, dans l'hypothèse de ds constant, $r=\frac{dy\,ds}{ddx}=-\frac{dx\,ds}{ddy}$ d'où $ddx=\frac{dy\,ds}{r}$, $ddy=-\frac{dx\,ds}{r}$; et mettant, au lieu de ddx et ddy, ces valeurs

$$\frac{d\{Pr(dx\sin. a-dy\cos. a)\}}{ds}+P(dy\sin. a+dx\cos. a)=0$$

426. Enfin substituant à r l'expression $\frac{dy\,ds}{ddx}$, on arrive à l'équation du 3ᵉ. ordre

$$d\left\{\frac{Pdy(dx\sin. a-dy\cos. a)}{ddx}\right\}+P(dy\sin. a+dx\cos. a)=0$$

427. Lorsque les forces tangentielles, appliquées aux points extrêmes de la courbe, ne sont pas données à *priori*, ou, lorsque ces points extrêmes sont fixes, les déterminations des tensions que la courbe y éprouve sont liées à celles des constantes arbitraires, introduites par les intégrations. On voit, en général, par les relations qui existent entre les équations de l'art. 405, et celles de l'art. 414 et suivants, que ces dernières, se rapportent spécialement aux différents points du système, autres que les points *limites*, qui exigent des considérations particulières.

Application des formules précédentes au cas où les directions des forces sont supposées normales à la courbe funiculaire.

428. L'équation de l'art. 425 donne immédiatement une propriété remarquable de l'équilibre d'une courbe funiculaire sollicitée par des forces dont toutes les directions sont perpendiculaires aux éléments de courbe auxquels ces forces sont respectivement appliquées.

Cette hypothèse donne

$$\sin.\ \alpha = \frac{dx}{ds}\ ;\ \cos.\ \alpha = -\frac{dy}{ds}$$

d'ou on tire

$$\frac{d\,\{\, Pr\,(\,dx^2 + dy^2\,)}{ds^2} = 0$$

observant que ds, dont le carré $= dx^2 + dy^2$, est constante et intégrant, on a

$$Pr = \text{constante}\ ;\ P = \frac{\text{constante}}{r}$$

chaque force est réciproquement propportionnelle au rayon de courbure de l'élément de courbe sur lequel elle agit.

Équation de la courbe funiculaire sollicitée par des forces parallèles et égales.

429. Les forces qui sollicitent le polygone funiculaire, et qui agissent dans un même plan, étant de plus supposées égales, et parallèles à l'axe des y, on pourra trouver, immédiatement, les conditions de leur équilibre, en répétant les raisonnements des art. 417, 418, 419 et 420, et observant que l'hypothèse de $\alpha = \alpha_{,} = \frac{1}{2}\pi$, donne $\sin.\,(a - \alpha) = \cos.\,a$ et $\sin.\,(a_{,,} - a_{,}) = \cos.\,a_{,,}$. Cette simplification et la condition $P = P_{,} =$ *constante*, réduisent l'équation de l'art. 418 à

$$\cos.\,a\ \sin.\,(\,a_{,,} - a_{,}\,) = \cos.\,a_{,,}\ \sin.\,(\,a_{,} - a\,)$$

430. Introduisant, dans cette équation, les valeurs données art. 423, on a, toutes réductions faites, $rdx = r_{,}\,dx_{,,}$; ou, en éliminant les quantités accentuées, au moyen des valeurs $r_{,} = r + dr$, $dx_{,,} = dx + 2\,ddx + d^3x$, et négligeant les termes d'un ordre plus élevé que le second, $2\,rddx + drdx = 0$, et enfin

$$d(rdx) + rddx = 0$$

431. Faisant encore disparaître le rayon de courbure $r = \frac{dy\,ds}{ddx}$ (ds est supposé constant) cette équation devient

$$d\left(\frac{dy\,dx}{ddx}\right) + dy = 0$$

432. Les équations des deux articles précédents sont exactement, les mêmes qu'on aurait eu, sans calcul, en faisant, dans les équations des art. 424 et 426, $P = constante$ et $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ d'où, $\sin.\alpha = 1$, $\cos.\alpha = 0$. Cette simplification rend l'équation différentielle de la courbe funiculaire intégrable, ainsi qu'on va le voir.

433. La première intégrale de $d\left(\frac{dy\,dx}{ddx}\right) + dy = 0$, est

$$\frac{dy\,dx}{ddx} = A - y$$

A est la constante arbitraire. Mettant cette intégrale sous la forme

$$(1) \ldots\ldots\ldots \quad \frac{ddx}{dx} = \frac{dy}{A-y}$$

et observant que ds est supposé constant, on obtient, immédiatement, une seconde intégrale

$$(2) \ldots\ldots\ldots \quad dx(A-y) = B\,ds$$

de laquelle on tire

$$(3) \ldots\ldots \quad dx = \frac{\pm B\,dy}{\sqrt{(A-y)^2 - B^2}}$$

B étant une seconde constante arbitraire. Enfin la 3e. intégrale est (*Traité élémentaire de calcul intégral de Lacroix, art. 162*)

$x = B \log. C \mp B \log. \{A - y + \sqrt{(A-y)^2 - B^2}\}$

ou .... $x = \mp B \log. \{C(A - y + \sqrt{(A-y)^2 - B^2})\}$ ..... (4)

La courbe a deux branches égales et semblables, placées symétriquement de part et d'autre d'une parallèle à l'axe des y.

434. Les trois constantes A, B, C sont données, lorsqu'on connaît les positions du premier et du dernier point, et la longueur de la courbe qui est susceptible d'une rectification algébrique. L'équation (2) de l'art. précédent donne $ds = \frac{dx(A-y)}{B} = \frac{(A-y)\sqrt{dy^2 - ds^2}}{B}$; d'où

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ ds = \pm \frac{dy(A-y)}{\sqrt{(A-y)^2 - B^2}}$$

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ s = \mp \sqrt{(A-y)^2 - B^2} + E$$

E est une 4e. constante arbitraire.

435. Substituant, successivement, dans l'équation (4) de l'art. 433, les valeurs de x et y qui correspondent à l'origine et au dernier point de la courbe, et faisant des substitutions pareilles, pour s et y, dans l'équation (2) de l'art. 434, on aura quatre équations déterminées, qui renfermeront les quatre inconnues A, B, C, E, avec des quantités connues; les deux premières équations sont transcendantes, mais, quand il ne s'agit que d'évaluations numériques, on peut, par des méthodes d'approximation, obtenir les valeurs cherchées.

436. Lorsque les constantes seront ainsi déterminées, on trouvera aisément, par les équations (3) et (4), de l'article 433, la position du point de la courbe où la tangente est parallèle à l'axe des x, c'est-à-dire où on a $\frac{dy}{dx} = 0$. Faisant passer, par ce point, une parallèle aux y et plaçant l'origine des coordonnées, sur cette parallèle, à une distance A de l'axe des x, du côté des y positives, on aura (les nouveaux axes des coordonnées étant parallèles aux anciens) l'équation de la courbe sous la forme suivante, la plus simple dont cette équation soit susceptible

$$\pm x = B \log. \left(\frac{y - \sqrt{y^2 - B^2}}{B}\right)$$

{ y, dans l'équation ci-à côté, représente $A-y$ de l'équation (4), art. 433.

Les deux branches égales et semblables de la courbe sont placées symétriquement, de part et d'autre du nouvel axe des y, le paramètre B, égal à la distance de l'origine des coordonnées au sommet de la courbe, est, en même temps, égal à son rayon de courbure au même point, le rayon de courbure, à un point quelconque, étant $= \frac{y^2}{B}$; voyez, pour la démonstration de plusieurs propriétés curieuses de cette courbe, un mémoire de Mr. Ampère publié dans le tome 1er. de la collection des mémoires présentés à l'Institut par divers savants.

437. Conservant la position des axes coordonnés déterminée dans

l'art. précédent, la tangente trigonométrique de l'angle formé par l'axe des x et par l'élément ds de la courbe a pour valeur

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \pm \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^2 - B^2}}{B}$$

et la longueur de l'arc de la courbe, comptée du point dont l'abcisse $x = 0$, se calcule par l'équation

$$(2) \ldots\ldots \pm s = \sqrt{y^2 - B^2} \left\{ \begin{array}{l} \text{l'origine des } s \text{ doit être prise au point où} \\ y = B \text{ et } x = 0, \text{ le même point où } \frac{dy}{dx} = 0. \end{array} \right.$$

Évaluation de la tension, à un point quelconque de la courbe funiculaire; définition de la *chaînette*.

438. Toute l'analyse renfermée dans les dix articles précédents est uniquement fondée sur les conditions de l'égalité et du parallélisme des forces appliquées aux différents points de la courbe funiculaire, et laisse entièrement indéterminée l'intensité commune de chacune de ces forces. Ainsi l'équilibre ayant lieu dans une certaine hypothèse sur cette intensité, on peut la doubler, la tripler, etc. sans que la forme de la courbe funiculaire change, si toutefois le cordon est capable de résister à la tension qu'il éprouve et dont il faut donner l'évaluation.

Je nomme $T_{,}$ et $T_{,,}$ les forces tangentielles qui retiennent la courbe à son premier et à son dernier point, et qui peuvent être les résistances de deux points fixes auxquels le cordon serait attaché; et substituant, dans l'équation (1) de l'article précédent, pour y les valeurs de la première et de la dernière ordonnée, j'ai les angles que forme la courbe avec l'axe des abcisses à son origine et à son extrémité, angles que je désigne, respectivement, par $A_{,}$ et $A_{,,}$.

Il s'agit d'abord d'évaluer $T_{,}$ et $T_{,,}$, mais on ne peut rien prononcer sur ces forces, ou ces tensions extrêmes, sans connaître les forces qui agissent sur le système entier; supposons que la courbe funiculaire est une corde pesante, homogène, uniformément grosse, et, d'ailleurs, parfaitement flexible et inextensible; la force appliquée à chacun de ses éléments aura, pour valeur, le poids de cet élément, et le plan vertical, dans lequel se trouveront les point extrêmes de cette courbe, la renfermera toute entière. Les axes des x et des y, art. 436 et 437, seront, l'un horizontal

horizontal et l'autre vertical; le point où $\frac{dy}{dx}=0$ sera le point le plus bas de la courbe.

De plus, si, pour simplifier, on regarde comme unité de poids, le poids de l'unité de longueur de la corde et qu'on fasse sa longueur totale, entre les points extrêmes, égale à Ω, on aura trois forces Ω, $T_{,}$ et $T_{,,}$ en équilibre, la première, qui est verticale, faisant, avec chacune des deux autres, des angles respectifs, $\frac{1}{2}\pi-A_{,}$, et $\frac{1}{2}\pi-A_{,,}$, ce qui fournit, art. 50, les proportions

$$\Omega : T_{,} : T_{,,} :: \sin.(A_{,}+A_{,,}) : \cos. A_{,,} : \cos. A_{,}$$

desquelles on déduit

$$T_{,}=\frac{\cos. A_{,,}}{\sin.(A_{,}+A_{,,})}\,\Omega\;;\; T_{,,}=\frac{\cos. A_{,}}{\sin.(A_{,}+A_{,,})}\,\Omega$$

439. Ces deux équations peuvent se mettre sous la forme

$$T_{,}=\frac{\sqrt{1+\text{tang.}^2 A_{,}}}{\text{tang.} A_{,}+\text{tang.} A_{,,}}\,\Omega\;;\; T_{,,}=\frac{\sqrt{1+\text{tang.}^2 A_{,,}}}{\text{tang.} A_{,}+\text{tang.} A_{,,}}\,\Omega\;;$$

on a art. 437, en désignant par $\sigma_{,}$ et $\sigma_{,,}$ les ordonnées respectives du premier et du dernier point de la courbe,

$$\text{tang.} A_{,}=\frac{\sqrt{\sigma_{,}^2-B^2}}{B}\;;\;\text{tang.} A_{,,}=\frac{\sqrt{\sigma_{,,}^2-B^2}}{B}\;;$$

$$\Omega=(\sigma_{,}^2-B^2)^{\frac{1}{2}}+(\sigma_{,,}^2-B^2)^{\frac{1}{2}}$$

et ces valeurs, substituées dans les deux équations précédentes, donnent les résultats remarquables

$$T_{,}=\sigma_{,}\;;\; T_{,,}=\sigma_{,,}.$$

440. Ces résultats auraient été obtenus d'une manière plus simple encore si on les eût déduit de la tension que la courbe éprouve à son point le plus bas, au point où $\frac{dy}{dx}=0$, et dont l'ordonnée $=B$; désignant cette tension par Θ et faisant la longueur de la courbe, depuis son premier point jusqu'à celui dont nous nous occupons, égale à ω, on a art. 437, $\omega=\sqrt{\sigma_{,}-B^2}$, et art. 50

$$\omega : \Theta :: \sin. A_{,} : \cos. A_{,} :: \frac{\sin. A_{,}}{\cos. A_{,}} : 1$$

d'où . . . . $\Theta=\frac{\omega}{\text{tang.} A_{,}}$

et substituant pour ω et tang. A, leurs valeurs,

$$\Theta = B$$

B est l'ordonnée du point le plus bas de la courbe.

441. A un point quelconque, où la tension est t, on a

$$t : \Theta :: 1 : \frac{dx}{ds}$$

d'où . . . . $t = \frac{ds}{dx} \cdot \Theta$

et substituant, pour Θ et $\frac{ds}{dx}$ leurs valeurs respectives B et $\frac{y}{B}$, on a

$$t = y$$

la tension, à un point quelconque de la courbe, est égale au poids d'un arc de cette courbe de même longueur que l'ordonnée du point où se fait éprouver cette tension.

442. La courbe, dont je viens d'exposer les propriétés, connue par les géomètres sous le nom de *chaînette*, est célèbre dans l'histoire des mathématiques.

Les puissances qui sollicitent le polygone ou la courbe funiculaire, sont dirigées sur des points fixes dans l'espace. Cas où on suppose que ces forces tendent à un centre commun et sont des fonctions quelconques des distances de leurs points d'application à ce centre.

443. J'ai supposé, dans toute la théorie exposée depuis l'art. 392, que les quantités, ou données ou cherchées relativement à chaque force, étaient son intensité, les angles formés par sa direction et par des axes fixes dans l'espace, et un seul point de sa direction, appartenant au polygone ou à la courbe funiculaire. Cette hypothèse convient à la plupart des usages qu'on a à faire du système funiculaire, dans les machines; il est cependant des cas où l'action d'une puissance se transmet à un pareil système, par l'intermède d'une corde qui passe sur une poulie fixe, et si, envisageant les problèmes qui le concernent, sous un point plus étendu, on veut le considérer comme soumis aux forces naturelles, résultant des actions réciproques des corps les uns sur les autres, il faut avoir égard aux points fixes vers lesquelles ces forces sont, en général dirigées.

Il convient, d'après ces observations, de compléter les études utiles

que les élèves ont eu occasion de faire sur le polygone funiculaire, par un court examen du cas des points fixes extérieurs au système.

444. Conservant la notation des art. 394 et 405, j'appelle $\xi_{(m)}$, $\eta_{(m)}$, $\zeta_{(m)}$, les coordonnées respectivement parallèles aux x, y et z, du point fixe, par lequel passe la direction de la force $P_{(m)}$ appliquée au point, ou sommet d'angle, n°. m; on peut imaginer, à ce point fixe, un anneau, d'une ouverture infiniment petite, traversé par un fil parfaitement flexible et inextensible, dont une des extrémités est attachée au point n°. m, la puissance $P_{(m)}$ étant appliquée à un point quelconque de ce fil qui ne soit pas compris entre le point n°. m et l'anneau fixe, et son intensité, étant égale à la tension du même fil; cette manière d'envisager les actions des forces $P_{(m)}$ fournit immédiatement le moyen de les représenter par des poids suspendus aux extrémités des fils qui traversent les anneaux fixes.

445. Les forces, qui sollicitent les différents points ou sommets d'angles du polygone, seront ainsi représentées, en intensités, et directions, par les tensions et les directions des fils attachés à ces points et traversant les anneaux fixes, quelques soient d'ailleurs les directions des forces qui tiennent ces fils tendus. Introduisant ces nouvelles conditions dans les équations (δ) de l'art. 405, on remplacera cos. $\alpha_{,,}$, cos. $\delta_{,,}$, cos. $\gamma_{,,}$, cos. $\alpha_{,,,}$, cos. $\delta_{,,,}$, cos. $\gamma_{,,,}$, par des quantités dont les expressions auront la forme

$$\cos. \alpha = \frac{\xi - x}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}}$$

$$\cos. \delta = \frac{\eta - y}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}}$$

$$\cos. \gamma = \frac{\zeta - z}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}}$$

des-lors ces équations (δ) ne renfermeront plus que des fonctions des puissances et des coordonnées de leurs points d'application, dans lesquelles entreront les constantes qui appartiennent aux points fixes.

446. Si, pour avoir un exemple de l'application des équations (δ) ainsi modifiées, on considère, comme données, les intensités des puissances, les longueurs des côtés du polygone, et qu'on suppose ses deux extrémités attachées à des points fixes, de positions connues, il restera

à déterminer $3(n-2)$ ordonnées ; or (δ) et (γ), de l'art. 405, fourniront, précisément un nombre d'équations égal à celui de ces inconnues.

Je n'entre dans aucun détail de calcul ; il me suffit d'avoir indiqué la marche de l'analyse ; je supprimerai également, pour abréger, les détails relatifs aux usages qu'on peut faire des équations des art. 396 et 400 en y introduisant les considérations exposées dans les deux articles précédents et je passe à l'examen curieux et instructif du cas où toutes les forces, appliquées à un polygone ou a une courbe funiculaire, tendent à un centre commun.

447. Ce polygone, ou cette courbe, étant supposés attachés à deux points fixes, ou sollicités, à leurs extrémités, par des forces tangentielles dirigées dans un plan qui renferme le centre commun des directions des forces, ce même plan renfermera la trace entière du polygone ou de la courbe.

Je mets l'équation générale de l'art. 418, sous la forme suivante.

$$\frac{\sin.(a_{,,}-a_{,})}{P'\sin.(\alpha_{,,}-\alpha_{,})}=\frac{\sin.(a_{,}-a)}{P\sin.(a-\alpha)}\ \ldots\ldots\ (1)$$

et il s'agit d'y introduire les conditions qui caractérisent le cas particulier de la convergence des forces en un point commun ; pour cela, désignant par p et $p_{,}$ les distances respectives du centre de direction des forces aux points d'application de P et $P_{,}$, j'observe que le triangle formé par les lignes p, $p_{,}$ et par le côté du polygone aux extrémités duquel elles aboutissent, donne la proportion

$$p : p_{,} :: \sin.(a_{,}-\alpha_{,}) : \sin.(a_{,}-\alpha)$$

d'où $\ldots\ldots\ p_{,}\sin.(a_{,}-\alpha_{,})=p\sin.(a_{,}-\alpha)\ \ldots\ldots\ (2)$ équation de condition cherchée ; divisant (1) par (2), on obtient l'équation

$$(3)\ \ldots\ \frac{\sin.(a_{,,}-a_{,})}{P_{,}p_{,}\sin(a_{,,}-\alpha_{,})\sin(a_{,}-\alpha_{,})}-\frac{\sin.(a_{,}-a)}{Pp\sin(a_{,}-\alpha)\sin(a-\alpha)}=0$$

cette équation nous apprend qu'on a, pour chaque point d'application des forces, une expression de la forme $\dfrac{\sin.(a_{,}-a)}{Pp\sin.(a_{,}-\alpha)\sin.(a-\alpha)}$ qui représente une quantité constante, dans l'étendue entière du système, puisque la différence entre deux expressions de cette forme, qui se rap-

portent à deux points consécutifs quelconques est égale à zéro. Ce résultat donne l'équation

$$(2) \ldots\ldots \frac{Pp \sin.(a_{,}-\alpha)\sin.(a-\alpha)}{\sin.(a_{,}-a)} = constante$$

et c'est une première intégration effectuée d'avance pour le passage du polygone à la courbe.

448. J'appelle ψ l'angle formé par le rayon vecteur p et par une ligne de position déterminée dans le plan des forces, et passant du polygone à la courbe, j'ai par les théories géométriques, en désignant, par ds, l'élément de la courbe qui a p pour rayon vecteur, et par r le rayon de courbure de cet élément,

$$(1) \ldots \sin.(a_{,}-a) = \frac{ds}{r}\ ;\ r = -\frac{p\,dp}{d\left(\frac{p^2\,d\psi}{ds}\right)}$$

$$\sin.(a-\alpha) = \frac{p\,d\psi}{ds}.$$

l'hypothèse de la *continuité* permet de faire $\sin.(a_{,}-\alpha) = \sin.(a-\alpha)$; et toutes ces valeurs, substituées dans l'équation (2) de l'art. précédent, la changent en

$$-Pp\,\frac{p^2\,d\psi^2}{ds^3}\cdot\frac{p\,dp}{d\left(\frac{p^2\,d\psi}{ds}\right)} = A$$

A étant une constante.

449. La constante A doit, d'après ce qui est dit ci-dessus, représenter une expression de même forme que celle du premier membre de l'équation qui la renferme, et cette expression appartient à un point déterminé de la courbe.

Si on appelle G la force agissant sur ce point, g, χ, et R, respectivement, le rayon vecteur, l'angle que ce rayon forme avec la courbe, et le rayon de courbure, au même point, on aura, ds étant supposé constant, $A = -\frac{RGg.\sin.^2\chi}{ds} = -\frac{B}{ds}$, en faisant $RGg\sin.^2\chi = B$, et l'équation de l'article précédent, devient

$$P\,dp = B\cdot\frac{ds\,d(p^2\,d\psi)}{p^4\,d\psi^2}$$

450. On en déduit par l'intégration

$$(1) \ldots\ldots p^2 d\psi \int P dp = -B ds$$

mettant, au lieu de ds, sa valeur $\sqrt{dp^2+p^2 d\psi^2}$, et dégageant $d\psi$, on a ultérieurement

$$(2) \ldots\ldots d\psi = \frac{B dp}{p\{p^2(\int P dp)^2 - B^2\}^{\frac{1}{2}}}$$

451. Telle est l'équation polaire, la plus générale de la courbe funiculaire, dans le cas où toutes les forces tendent à un centre commun. P étant une des forces de la nature, dont j'ai parlé art. 443, sera, en général, fonction de p, ensorte que $\int P dp$, et par suite, ψ seront aussi fonctions de cette seule variable.

Supposons que P soit soumis aux mêmes lois que les forces du système du monde, et que, par conséquent, son intensité soit réciproquement proportionnelle au carré du rayon vecteur p, on aura

$$P : G :: g^2 : p^2 \; ; \; P = \frac{Gg^2}{p^2}$$

$$\int P dp = Gg^2 . \int \frac{dp}{p^2} = -Gg^2 . \frac{1}{p} + constante$$

je prend l'origine des angles ψ sur le rayon vecteur g, et considérant g comme la valeur initiale de p, j'ai $constante = Gg$, d'où

$$(1) \ldots\ldots \int P dp = Gg\left(1 - \frac{g}{p}\right) = Gg\left(\frac{p-g}{p}\right)$$

et l'équation (2) de l'article précédent devient, en faisant $R \sin.^2 \chi = h$

$$(2) \ldots\ldots d\psi = \frac{h dp}{p\{(p-g)^2 - h^2\}^{\frac{1}{2}}}$$

452. Soit P réciproquement proportionnel à une puissance ω du rayon vecteur p, on aura

$$P : G :: g^\omega : p^\omega \; ; \; P = \frac{Gg^\omega}{p^\omega}$$

$$\int P dp = Gg^\omega . \int \frac{dp}{p^\omega} = \frac{Gg^\omega}{1-\omega} p^{1-\omega} + constante$$

$\int P dp$ devant, comme à l'art. précédent, s'évanouir lorsque $p = g$, l'intégrale devient

$$(1) \ldots\ldots \int P dp = \frac{Gg^\omega}{1-\omega}\left(p^{1-\omega} - g^{1-\omega}\right)$$

et cette valeur, substituée dans l'équation (2) de l'art. 450, donne

$$(2)\ldots d\psi = \frac{h\,dp}{p\left\{\frac{g^{\omega}}{(1-\omega)^2}\,(p^{1-\omega}-p\,g^{1-\omega})^2-h^2\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

453. L'équation (2), art. 451, a une intégrale algébrique dans le cas de $g=h$; autrement elle s'intègre, ou par logarithmes, ou par arcs de cercle. On peut observer, de plus, que lorsque G représente la puissance appliquée au sommet de la courbe, ou au point le plus près du centre de direction des forces, on a sin. $\chi=1$, parce que, à ce point, où $\frac{dp}{p\,d\psi}=0$, et $\frac{p\,d\psi}{ds}=1$, le rayon vecteur est perpendiculaire à la courbe.

Je supprime, pour abréger, les détails, purement analytiques et géométriques, que l'examen des équations des deux articles précédents pourrait amener, mon principal, ou plutôt, mon unique objet ayant été de présenter aux élèves la théorie de statique qui conduit à ces équations et qui leur fournit matière à une étude extrêmement utile sur les systèmes de forme variable.

Principe général de l'équilibre ; ce qu'on entend par *vîtesses virtuelles*.

454. J'ai démontré, art. 75 et suivants, plusieurs propriétés remarquables de l'équilibre d'un point matériel, sollicité par des forces agissant dans des directions quelconques, et j'ai fixé, particulièrement, l'attention des élèves sur l'équation $\int P\,dp=0$, de l'art. 87, en leurs disant que cette équation était « l'énoncé, applicable à l'équilibre d'un point « matériel, d'un principe très-général de mécanique, appelé principe des « *vîtesses virtuelles*, » et en leur annonçant que « son important usage, « pour l'analyse de tous les problèmes d'équilibre et de mouvement, « serait développé dans la suite du cours. »

Il est temps de donner les développements que j'ai promis, quant à ce qui concerne la statique, et je vais d'abord présenter l'énoncé du *principe général de l'équilibre*, considéré relativement à un système quelconque, après quoi je prouverai que lorsque l'équation déduite de ce principe est satisfaite l'équilibre a lieu, et réciproquement.

455. « Soient P', P'', etc. des forces en nombre quelconque respecti-

« vement appliquées à un pareil nombre, (fini ou infini) de points ma-
« tériels qui composent un système, de forme variable ou invariable,
« que j'appelle système A.

« Imaginons un autre système, que j'appelle système B, dont la gran-
« deur et la forme, ou soient les mêmes que la grandeur et la forme du
« système A, ou en diffèrent infiniment peu, et qui occupe une position
« infiniment voisine de celle de A; il faut qu'en cet état de choses,
« chaque point de A puisse prendre la place de son homologue, dans B,
« sans qu'aucune des conditions auxquelles les positions des points de A,
« et leur mode de liaison doivent satisfaire, soit violée. La forme et la
« position de B demeureront arbitraires pour tout ce qui sera compatible
« avec ces divers assujettissements.

« Du point qui, dans le système B, est homologue au point d'aplica-
« tion de la puissance P', dans le système A, menons une perpendicu-
« laire sur la direction de P'; nommons dp' la distance entre le point
« d'application de p' et le pied de cette perpendiculaire; donnons à dp'
« le signe positif, si P' tend à pousser son point d'application vers le
« pied de la perpendiculaire abbaissée sur sa direction, et le signe né-
« gatif dans le cas contraire. Enfin prenons, sur les directions de P'',
« P''', etc., des longueurs dp'', dp''', etc. déterminées par le même pro-
« cédé que dp', et assujetties, quant aux signes, aux mêmes conditions.

« Si les puissances P', P'', etc. se font équilibre, sur le système, on
« aura l'équation

$$P'\,dp' + P''\,dp'' + P'''\,dp''' + \text{etc.} = 0$$

« et réciproquement, lorsque cette équation sera satisfaite l'équilibre
« aura lieu. »

456. Les distances, infiniment petites, entre les points homologues des systèmes A et B ont été nommés les *vîtesses virtuelles* des points d'application des forces P', P'', etc.; voici sur quoi cette dénomination est fondée: si, lorsque les systèmes A et B sont dans des positions infiniment voisines, chaque point du système A soumis à l'action d'une force, se mouvait de manière à aller prendre la place de son point homologue dans le système B, ce qui, d'après l'article précédent, pourrait se faire sans que les conditions du système A fussent troublées, et si, de plus, tous les déplacements s'opéraient dans le même temps, infiniment petit, les rapports qui existeraient entre les espaces élémentaires parcourus par les

les poiuts d'application des forces, seraient ceux des *vitesses* de ces points, et pourraient représenter ces *vitesses*, ainsi que je l'expliquerai au commencement de la 2e partie du cours; ces *mouvements* et ces *vitesses* n'ont pas lieu, mais sont compatibles avec les conditions du système; en conséquence les vitesses ont été nommées *virtuelles*, et le principe, qui donne l'équation de l'art. précédent, a été nommé, *principe des vitesses virtuelles.* Les incréments dp', dp'' etc, ou les espaces parcourus par les points, supposés mobiles, dans le sens des lignes de direction des forces, sont les *vitesses virtuelles* estimées suivant ces directions, et on énonce le principe général, en disant que les produits de ces *vitesses*, ainsi décomposées, par les forces respectives auxquelles elles se rapportent, doivent, lorsque l'équilibre a lieu, former une somme égale à zéro, et réciproquement.

C'est avec ces considérations anticipées de *mouvement*, qu'on présente ordinairement les notions relatives à la signification de l'équation $\Sigma(P\,dp)=0$, et je les employerai quand elles abrégeront le discours. Mais j'ai cru convenable de faire voir, dès l'abord, qu'on pouvait s'en passer.

Définition des *moments*, dans l'acception qu'on donne à ce mot lorsqu'il s'agit du principe des *vitesses virtuelles*, ou principe général de l'équilibre. Observations sur les changements de formes et de positions des systèmes qui produisent les *moments*.

457. Après avoir expliqué, avec les détails suffisants, la génération des quantités de la forme $P\,dp$ dont l'égalité à zéro assure l'équilibre, ou en est une conséquence, je dois ajouter qu'on a donné à ce produit $P\,dp$, le nom de *moment* de la force P. J'ai déja parlé de la signification de ce mot, art. 89, à l'occasion d'un cas particulier d'équilibre, et comme il n'a pas ici, ni à l'art. cité, la même acception qu'aux art. 157, 158 et suivants, j'aurai soin, pour éviter toute équivoque, chaque fois que j'employerai le mot *moment*, dans le sens que je viens de lui attribuer, de le faire suivre du no. du présent art. 457.

458. Voici maintenant quelques observations par lesquelles je crois devoir, pour plus de clarté, compléter les notions qui précèdent, avant d'exposer la théorie analytique qui les concerne.

Je ferai d'abord remarquer que le double assujettissement imposé,

art. 455, de donner au système B une forme et une grandeur telles que lorsque ce système est dans une position infiniment voisine de celle du système A, tous les points de ce dernier puissent, sans violer les conditions de leurs liaisons, prendre, dans le premier, la place de leurs homologues, suppose (A et B occupant, comme on vient de le dire, des positions infiniment voisines) que, dans le cas où le système A aura des points fixes dans l'espace, ces points coïncideront avec leurs homologues dans B, et que si d'autres points sont assujettis à être posés sur des courbes et des surfaces, les homologues de ceux-ci seront sur les mêmes courbes et les mêmes surfaces. Les espaces élémentaires dp, qui entrent dans l'équation générale de l'art. 455 et qui se rapportent à l'une ou à l'autre classe des points dont je viens de parler, devront donc ou être nuls ou être déduits d'arcs pris sur des courbes ou des surfaces.

459. Les changements, infiniment petits, tant de la position générale de A, que des positions relatives de ses points, qui feraient occuper à ceux-ci les places de leurs homologues dans B, sont des modifications du système, qui ne supposeraient, si elles avaient lieu, aucun effort, aucune dépense de force; chacun de ces points ne doit pas opposer plus de résistance à sa translation, que ne le ferait un point matériel pesant, posé sur un plan horizontal, et sollicité par une force agissant dans ce plan, à laquelle le point matériel doit céder, quelque petite qu'on la suppose, la résistance que ce point peut opposer à son déplacement, dans le sens horizontal, étant un zéro absolu.

Cette *indifférence* absolue des points d'un système à passer, de leurs positions actuelles, à toutes les positions infiniment voisines, que les conditions du système leur permettent de prendre, a lieu non-seulement lorsque le système n'est soumis à l'action d'aucune force, mais encore lorsqu'il est sollicité par des forces qui se font équilibre. On reconnaîtra la vérité de cette proposition, si on fait attention que les conditions, susceptibles d'être exprimées analytiquement, qui fixent les positions respectives que les différents points du système peuvent prendre, assujettissent chacun d'eux à se mouvoir sur une ligne ou une surface ayant une certaine position par rapport aux autres points; l'équilibre qui, par l'état de la question, existe entre l'ensemble des forces agissant sur le système, suppose un équilibre partiel, entre les efforts qu'a à supporter l'un quelconque de ces points, et qui sont dûs tant aux puissances im-

médiatement dirigées sur lui, qu'à celles dont il éprouve l'action par l'intermède des parties du système. Or cet équilibre partiel exige que la résultante des efforts dont je viens de parler, soit perpendiculaire à la courbe ou à la surface sur laquelle le point est obligé de rester, rien ne s'oppose donc à ce qu'il éprouve un changement de position infiniment petit sur cette courbe ou cette surface.

460. J'ai dit, art. 389, à propos des équations de condition du système funiculaire, que les cordons qui n'éprouvaient aucune tension, ou qui étaient lâches, n'étant pas des moyens de transmission des forces, devaient être regardés comme étrangers au système. Des considérations analogues s'appliquent au principe général de l'équilibre ; lorsque des points d'un système sont attachés les uns aux autres, par des liens flexibles que les forces en équilibre, sur ce système, tiennent tendus, il faut exclure des changements de forme qui introduisent des termes dans la somme des moments (art. 457) ceux qui rapprocheraient deux quelconques des points, ainsi liés, en détruisant la tension du lien intermédiaire.

Il est visible que les forces appliquées au système, restant les mêmes, le rapprochement dont je viens de parler ne peut s'opérer qu'en vertu d'efforts supérieurs à la tension du lien, ce qui, d'après l'art. précédent est contraire aux conditions assignées pour les changements *virtuels* de formes auxquels sont dûs les termes qui entrent dans l'équation générale de l'article 455.

461. Si les liens, qui unissent les différents points du système, sont susceptibles d'extension et de contraction, on doit, dans l'état d'équilibre, regarder comme invariable l'état où ils se trouvent, sous ce point de vue, par l'effet des actions des forces, considérer les changements *virtuels* de formes, sans avoir égard aux variations de dimensions qu'ils pourraient éprouver, en vertu de leur compréssibilité ou de leur élasticité, si le système était sollicité par d'autres forces, et supposer que ces changements de forme doivent, dans le cas où ils auraient lieu, s'opérer de la même manière que si les liens étaient inextensibles.

Cette condition n'exclut pas le mouvement qu'un anneau peut prendre dans le sens de la longueur d'un fil élastique qui le traverse pourvu que la tension de ce fil reste la même.

462. Enfin on donnera aux valeurs des incréments dp qui multiplient

les forces P dans l'équation générale de l'art. 455, toute la généralité possible, si le système B, dans sa position infiniment voisine de celle du système A, est placé de manière que les points de ce dernier ne puissent remplacer leurs homologues, sans que le système auquel ils appartiennent n'éprouve, indépendamment du changement de forme dû aux variations des distances respectives entre ses différents points, un mouvement général de translation ou de rotation, suivant qu'il sera *libre*, ou assujetti à tourner autour d'un point ou d'un axe.

Pour faire concevoir comment la réunion de ces deux conditions doit donner, en général, aux incréments dp des valeurs *complètes*, je citerai, en exemple, le polygone funiculaire; les moments (art. 457) des forces appliquées aux sommets de ses angles, qui ne se rapporteront qu'à leurs changements de positions les uns par rapport aux autres, pourront être complétement obtenus en laissant deux sommets consécutifs quelconques immobiles dans l'espace; soient ces points immobiles, ceux que j'ai appellé, art. 394, le 1er et le 2e *point*; dès-lors le 3e point ne pourra changer de position qu'en se mouvant sur une surface sphérique, de position fixe dans l'espace, le 4e point devra se trouver, après le changement, sur une autre surface sphérique d'un rayon donné, dont le centre sera un des points de la première surface, etc. et cependant tous les changements de positions relatifs au mode de liaison des parties du système, auront été opérés; mais si, indépendamment des mouvements *conditionnels*, par lesquels s'opèrent ces changements, vous imprimez au système un mouvement général de translation, le 1er et le 2e point pourront prendre des positions assujetties à la seule condition de laisser entr'eux une distance invariable; le 3e point au lieu de parcourir un arc pris sur une surface sphérique de position déterminée, pourra parcourir une ligne élémentaire, faisant avec cette surface un angle quelconque, c'est sur cette ligne que sera le centre d'une surface sphérique ayant le 3e côté pour rayon et renfermant le 4e point etc.

Réciproquement, il serait facile d'imaginer d'autres modifications du système qui sembleraient n'être que des changements de forme purs et simples, et qui, cependant, pourraient, dans chaque cas, se ramener à un changement de cette espèce et à mouvement général de translation.

D'après ces observations, lorsqu'il s'agira des moments (art. 457) des forces appliquées à un système de forme variable, je supposerai que ce

système éprouve d'abord une variation infiniment petite dans sa position, sans changer de forme, comme le ferait un système de forme invariable, et qu'il subit ensuite un changement de forme compatible avec les conditions auxquelles il est soumis ; l'incrément dp, pour chaque point, sera le résultat de la combinaison de ces deux mouvements, et cependant l'une ou l'autre des deux parties, ainsi combinées, qui composeront cet incrément, pourra, dans certains cas, être égale à zéro, soit dans l'étendue entière, soit dans une partie du système.

Suite de ce qui a été dit, art. 83 et suivants, sur le principe des *vîtesses virtuelles* considéré relativement à l'équilibre d'un point.

463. L'équation $\Sigma(P\,dp) = 0$, applicable art. 88, à un point matériel, *libre*, a été déduite, comme conséquence, des équations exprimant les conditions de l'équilibre des forces appliquées à ce point, ainsi il est démontré que, lorsque l'équilibre a lieu, cette équation est satisfaite. L'inverse du théorême est aisée à prouver ; conservant la notation des article 83 et 87, observant que $\Sigma(P\,dp) = \rho\,\Sigma(P\cos.\theta)$ et que $\cos.\theta' = \cos.\alpha\cos.\alpha' + \cos.6\cos.6' + \cos.\gamma\cos.\gamma'$; $\cos.\theta'' = \cos.\alpha\cos.\alpha'' + \cos.6\cos.6'' + \cos.\gamma\cos.\gamma''$; etc., on peut mettre cette équation sous la forme

$$(k) \,..\, \rho\cos\alpha(P'c.\alpha' + \text{etc.}) + \rho c.6(P'c.6' + \text{etc.}) + \rho c.\gamma(P''c.\gamma'' + \text{etc.}) = 0$$

or $\rho\cos.\alpha$, $\rho\cos.6$ et $\rho\cos.\gamma$ sont des quantités absolument arbitraires, qui n'ont aucune relation necessaire, soit entr'elles, soit avec les autres quantités renfermées dans l'équation précédente ; prenant, à volonté, trois lignes $\lambda_{,}$, $\lambda_{,,}$, $\lambda_{,,,}$, on peut faire $\rho\cos.\alpha = \lambda_{,}$, $\rho\cos.6 = \lambda_{,,}$, $\rho\cos.\gamma = \lambda_{,,,}$, ce qui donnera $\rho = \sqrt{\lambda_{,}^2 + \lambda_{,,}^2 + \lambda_{,,,}^2}$, $\cos.\alpha = \frac{\lambda_{,}}{\rho}$, $\cos.6 = \frac{\lambda_{,,}}{\rho}$, $\cos.\gamma = \frac{\lambda_{,,,}}{\rho}$.

Il suit de cette indépendance des facteurs $\rho\cos.\alpha$, $\rho\cos.6$, $\rho\cos.\gamma$, que les termes dans lesquels ils entrent doivent être séparément égaux à zéro ; ainsi l'équation (k), qui n'est que l'équation $\Sigma(P\,dp) = 0$, sous une forme particulière, ne peut avoir lieu sans que les équations $P\cos.\alpha_{,} + \text{etc.} = 0$, $P\cos.6 + \text{etc.} = 0$, $P\cos.\gamma' + \text{etc.} = 0$, qui

expriment les conditions de l'équilibre, ne soient satisfaites. *C. Q. F. D.*

464. On a vu, art. 40. que si, en conservant l'intensité et la ligne de direction de la résultante R de plusieurs forces P', P'', etc. on fait agir R, sur cette ligne, en sens contraire à celui dans lequel elle doit agir pour remplacer P', etc. les forces R, P', P'', etc. seront en équilibre; on a vu, ensuite, art. 74, que, lorsque plusieurs forces sont en équilibre sur un point, l'une quelconque de ces forces peut être prise pour la résultante de toutes les autres, si, conservant sa ligne de direction on change le sens de son action; l'équation $\Sigma(P\,dp)=0$, peut donc être considérée comme exprimant généralement le rapport entre le moment d'une résultante et celui de ses composantes, ou comme énonçant que le moment (art. 457) de la résultante est égal à la somme des moments des composantes, (propriété correspondante à celle des *moments* définis art. 157).

Ainsi poser l'équation $\Sigma(P\,dp)=0$, ou dire que la somme des moments (art. 457) des forces P est nulle, c'est dire que le moment de la résultante de ces forces, est égal à zéro, et réciproquement.

465. En général, si on a un nombre quelconque de forces appliquées à un même point, et qu'on leur substitue d'autres forces, produisant le même effet, ou telles qu'en changeant le sens de l'action de chacune d'elles sur sa ligne de direction, ces dernières forces pourraient faire équilibre aux premières, la somme des moments sera la même dans l'un et l'autre système de forces. Cette proposition résulte immédiatement de ce qui est dit dans l'art. précédent.

466. Jusqu'ici j'ai supposé que le point matériel était *libre;* si ce point est assujetti à rester sur une ligne ou sur une surface courbe, l'équation $\Sigma(P\,dp)=0$, n'en sera pas moins la conséquence de l'équilibre présupposé, ou la preuve de cet équilibre dans le cas où on n'en serait pas assuré d'ailleurs; mais il faudra, conformément aux conditions prescrites art. 458, que les moments (art. 457) se rapportent à un changement *virtuel* de position sur la ligne ou la surface même qui renferme le point commun d'application des forces.

Les incréments dp remplissant ces conditions, le moment (art. 457) de la résultante sera nécessairement égal à zéro, dans le cas d'équilibre, car, art. 90 et 101, cette résultante doit être perpendiculaire à l'élément de ligne ou de surface courbe qui contient le point commun d'appli-

cation des forces, et dès-lors, toute projection faite sur sa direction, d'une longueur prise sur la tangente, ou sur le plan tangent est nulle; mais, d'après l'art. 464, la somme des moments (art. 457) des composantes, est égale au moment de la résultante donc on a encore $\Sigma(Pdp)=0$, lorsque des forces, appliquées à un point qui est assujetti à se mouvoir sur une ligne ou sur une surface courbe, sont en équilibre.

467. Réciproquement si on a $\Sigma(Pdp)=0$, sans avoir d'autres preuves de l'équilibre, et que tout soit d'ailleurs conforme à ce qui est dit dans l'art. précédent, on en conclura, d'abord, art. 464, que le moment de la résultante des forces P est nul, et si cette résultante que j'appelle R, a une valeur finie, son moment désigné par Rdr, étant nul, il faudra qu'on ait $dr=0$, et que par conséquent R soit perpendiculaire à la ligne ou à la surface courbe qui contient le point commun d'application des forces, et cette condition, art. 90 et 101, assure l'équilibre de ces forces.

Dans le cas où la résultante R est nulle, l'équation $\Sigma(Pdp)=0$ et l'équilibre, ont évidemment lieu en même temps.

L'équation donnée par le principe général des *vitesses virtuelles* a lieu, dans le cas de l'équilibre d'un système de forme invariable, et réciproquement.

468. Je vais considérer le principe des vitesses virtuelles dans un système de forme invariable, et je divise la question en deux parties, l'une purement géométrique et l'autre mécanique. Je commence par la première, qui est relative aux différentes manières dont on peut concevoir le déplacement ou le changement de situation dun corps dans l'espace (*).

Supposons qu'un corps soit placé à l'origine des coordonnées x, y et z; nommons *centre* le point de ce corps qui occupe l'origine, *section*, la section de ce corps par le plan des x, y, et employons les expressions de *centre* à l'origine, *section* à l'origine, *centre* déplacé, *section* déplacée, respectivement, selon que nous considérons le corps auquel appartient ce *centre* et cette *section*, comme restant à l'origine

(*) La démonstration qui occupe l'art. 468 et les quatre suivants est tirée d'un mémoire *sur le principe des vitesses virtuelles et la décomposition des mouvements circulaires*, que j'ai publié dans le Journal de l'École Polytechnique.

ou comme déplacé. Si ce corps quitte l'origine pour aller prendre une autre position quelconque dans l'espace, la *section* déplacée et supposée prolongée indéfiniment, coupera le plan des x, y en une certaine ligne droite. Par le *centre* de la *section* déplacée, je mène, dans le plan de cette *section*, une ligne droite parallèle à son intersection avec le plan x, y, et par conséquent parallèle au plan x, y lui-même; j'appelle cette ligne *axe* x, y, du nom du plan auquel elle est parallèle, et elle sera l'*axe* x, y à l'origine ou l'*axe* x, y déplacé, suivant que je la considérerai dans la *section* à l'origine ou dans la *section* déplacée.

Soit μ l'angle formé par la *section* déplacée et par le plan x, y, et ω l'angle formé par l'*axe* x, y à l'origine et l'*axe* x, y déplacé, ou une parallèle à cet axe passant par l'origine ; cela posé, un changement quelconque de position d'un corps primitivement placé à l'origine des coordonnées, peut toujours être produit par cinq mouvements indépendants, dont les valeurs particulières sont déterminées par les positions qu'on se donne arbitrairement, du *centre*, de la *section* et de l'*axe* x, y déplacés; pour fixer les idées, on peut imaginer que la partie de cet *axe* x, y située dans l'angle des x, y positives, accroît, par son déplacement, l'angle qu'elle faisait d'abord avec l'*axe* des x, et que la partie de la *section* comprise entre l'*axe* x, y et l'*axe* des y s'élève, par la rotation autour de l'*axe* x, y, dont nous allons parler, dans la région des x, y, z positives. Les circonstances du mouvement ainsi déterminées, on le produira de la manière suivante :

1°. Faites tourner le corps autour de l'*axe* des z d'une quantité angulaire ω, sans déplacer le *centre* à l'origine ; ce premier mouvement rendra l'*axe* x, y à l'origine parallèle à l'*axe* x, y déplacé ou à la position qu'il doit avoir après le déplacement du corps.

2°. Faites tourner, d'une quantité angulaire μ, la *section* à l'origine autour de l'*axe* x, y à l'origine, dans la nouvelle position que vient de prendre ce dernier ; ce deuxième mouvement rendra la *section* à l'origine parallèle à la *section* déplacée ou à la position qu'elle doit avoir après le déplacement du corps.

3°. La *section* et l'*axe* x, y étant maintenus dans des positions parallèles à celles qu'on vient de leur donner, faites mouvoir le *centre* à l'origine successivement le long des trois coordonnées du *centre* déplacé.

Le même procédé s'appliquera à toute autre détermination des circonstances

constances du déplacement; et le résultat de ces cinq mouvements sera la juxta-position complette du *centre*, de l'*axe* x, y et de la *section* à l'origine, sur le *centre*, l'*axe* x, y et la *section* déplacés, ou sur le point, la ligne et le plan dont ils doivent occuper la place, d'après la position qu'on s'est proposé de donner au corps dans l'espace.

De plus, ces cinq mouvements pourront s'effectuer dans tel ordre qu'on voudra; et quel que soit celui qu'on adopte, la position finale sera toujours la même.

469. Imaginons maintenant une ligne passant par un des points du corps, et faisant avec les axes des x, des y et des z, respectivement, des angles α, δ, γ, et cherchons, dans l'hypothèse où ce corps éprouverait un changement de position infiniment petit, du moins quant aux deux mouvements de rotation, de combien le point s'avance dans le sens de la ligne; ce qui se réduit à trouver les projections, sur cette ligne, de chacun des cinq mouvements précédemment décrits.

La position primitive et la position que doit prendre, après son déplacement, le point dont il s'agit, sont supposés dans la région des x, y, z positives, entre le plan des y, z et un plan perpendiculaire à celui des x, y, passant par l'*axe* x, y; et les deux mouvements de rotation se font dans les sens indiqués à l'article précédent. Ces conditions particulières n'ont pour objet, comme je l'ai déjà dit, que de fixer les idées, et n'otent absolument rien de la généralité des résultats; car la marche que je vais suivre s'applique indistinctement à tous les cas possibles, en ayant seulement égard aux signes des quantités.

Tout cela posé, il faut chercher les variations des coordonnées x, y et z du point dont il s'agit, dues à chacun des mouvements partiels, multiplier ces variations respectivement, par cos. α, cos. δ, cos. γ et la somme de ces produits (en ayant égard aux signes) sera la longueur que le point aura parcourue dans le sens de la ligne.

Commençons par les mouvements de rotation.

Premier mouvement. Le poids décrivant un arc ω, infiniment petit, autour de l'axe des z, la longueur absolue de cet arc sera $\omega\sqrt{x^2+y^2}$; et d'après le sens du mouvement, le point s'éloignera du plan x, z et s'approchera du plan y, z; l'augmentation de y sera le quatrième terme de la proportion $\sqrt{x^2+y^2} : x :: \omega\sqrt{x^2+y^2}$: l'augmentation cherchée

$= \omega x$, longueur dont la projection sur la ligne qui fait un angle $\mathcal{6}$ avec l'axe des y, a pour valeur $\omega\, x \cos.\, \mathcal{6}$. On trouvera de même, pour la projection de la diminution de x, le produit $-\omega y \cos.\, \alpha$.

Deuxième mouvement. Le point décrit un angle μ, infiniment petit, autour de l'*axe* x, y, dans la position que cet axe vient de prendre par le premier mouvement. La distance de ce point à un plan perpendiculaire à celui des x, y passant pat l'*axe* $x\,y$, est, en nommant ϕ l'angle formé par cet *axe* x, y et par l'axe des x, égale à $y \cos.\, \phi - x \sin.\, \phi$; d'où il suit que la distance du point à l'*axe* x, y est $\sqrt{(y \cos \phi - x \sin \phi)^2 + z^2}$ et la longueur absolue de l'arc décrit $= \mu \sqrt{(y \cos.\phi - x \sin.\phi)^2 + z^2}$. D'après la situation du point et le sens du mouvement, ce point s'éloigne du plan x, y, et s'approche du plan qui passe par l'*axe* x, y. L'augmentation de z est le quatrième terme de la proportion $\sqrt{(y \cos \phi - x \sin \phi)^2 + z^2} : y \cos \phi - x \sin \phi :: \mu \sqrt{(y \cos \phi - x \sin \phi)^2 + z^2}$: l'augmentation cherchée $= \mu\,(y \cos.\, \phi - x \sin.\, \phi)$, longueur dont la projection sur la ligne qui fait un angle γ avec l'*axe* des z, a pour valeur $\mu\,(y \cos.\phi - x \sin.\phi) \cos.\, \gamma$. On trouvera de même que $\mu\, z$ est la diminution de la distance au plan passant par l'axe x, y; mais, d'après le sens du mouvement, le point, en parcourant la ligne μz, s'approche du plan x, z, et s'éloigne du plan y, z; d'où il résulte une diminution de $y = -\mu z \cos.\, \phi$, dont la projection $= -\mu z \cos.\, \phi \cos.\, \mathcal{6}$, et une augmentation de $x = \mu z \sin.\, \phi$ dont la projection $= \mu z \sin.\, \phi \cos \alpha$.

Troisième, quatrième et cinquième mouvements. Ces trois mouvements produisent des augmentations communes aux coordonnées de tous les points du corps, et si $e_{,}$, $e_{,,}$, et $e_{,,,}$ sont les espaces qu'il font parcourir au *centre*, parallèlement aux trois axes coordonnées, on aura, en projettant ces trois mouvements sur la ligne qui fait les angles α, $\mathcal{6}$ et γ avec les axes, pour l'augmentation de x, la valeur $e_{,} \cos.\, \alpha$; pour celle y, la valeur $e_{,,} \cos.\, \mathcal{6}$; et $e_{,,,} \cos.\, \gamma$ pour celle de z. Ces valeurs sont supposées infiniment petites; mais elles pourraient être finies sans changer de forme.

470. Ainsi, en vertu des cinq mouvements décrits dans l'art. précédent, le point dont il s'agit se sera avancé parallèlement à la ligne qui fait avec les axes des x, des y et des z, respectivement, des angles α, $\mathcal{6}$ et γ, d'une quantité que nous désignerons par dp, et qui a pour valeur:

$$dp = \left\{ \begin{array}{l} e_{,} \cos. \alpha + e_{,,} \cos. 6 + e_{,,,} \cos. \gamma \\ + \mu \cos. \phi \, (y \cos. \gamma - z \cos. 6) \\ + \mu \sin. \phi \, (z \cos. \alpha - x \cos. \gamma) \\ + \omega \, (x \cos. 6 - y \cos. \alpha) \end{array} \right\}$$

Les quantités $e_{,}$, $e_{,,}$, $e_{,,,}$, μ, ϕ et ω sont constantes dans l'étendue entière du système, et toutes les autres quantités varient d'un point à l'autre.

et, quel que soit le changement de position, on obtiendra toujours une équation pareille, à cela près que, pour quelques cas, les signes qui dans le second membre affectent les différents termes de la première ligne horizontale, et ceux qui affectent la totalité des autres lignes horizontales, pourront changer en tout ou en partie; mais dans les deuxième, troisième et quatrième lignes, les deux termes renfermés entre les parenthèses seront toujours de signes contraires; ce qui suffit à l'objet que j'ai en vue.

471. Si on nomme $p_{,}$, $p_{,,}$, etc. des longueurs prises sur les directions des puissances $P_{,}$, $P_{,,}$, etc., appliquées à un système de forme invariable et se terminant aux points d'application de ces puissances, et qu'on rapproche l'équation de l'art. précédent, de celles de l'art. 346, après avoir multiplié celles-ci, respectivement par $e_{,}$, $e_{,,}$, $e_{,,,}$, $\mu \cos. \phi$, $\mu \sin. \phi$, ω, et fait une somme des produits, on aura :

$$P_{,} dp_{,} + P_{,,} dp_{,,} + P_{,,,} dp_{,,,} + \text{etc.} = 0.$$

c'est l'équation déduite du principe des vîtesses virtuelles.

472. Il est ainsi prouvé que cette équation est satisfaite, lorsque les équations d'équilibre de l'art. 346 ont lieu; il faut maintenant démontrer l'inverse du théorême.

Substituons, dans l'équation du principe des vîtesses virtuelles, pour $dp_{,}$, $dp_{,,}$, etc, leurs valeurs données par l'équation de l'art. 470; il suit de l'indépendance des cinq mouvements dont la considération a fourni cette équation, que tous les produits de $P_{,}$, $P_{,,}$, etc. par les parties de $dp_{,}$, $dp_{,,}$, etc. qui se rapportent à $e_{,}$, $e_{,,}$, $e_{,,,}$, ω et μ, doivent être séparément égaux à zéro; prenant d'abord les groupes de termes multipliés par $e_{,}$, $e_{,,}$, $e_{,,,}$ et ω, on a les quatre équations

$$P_{,} \cos. \alpha_{,} + P_{,,} \cos. \alpha_{,,} + \text{etc.} = 0,$$
$$P_{,} \cos. 6_{,} + P_{,,} \cos. 6_{,,} + \text{etc.} = 0,$$
$$P_{,} \cos. \gamma_{,} + P_{,,} \cos. \gamma_{,,} + \text{etc.} = 0,$$
$$P_{,} (x_{,} \cos. 6_{,} - y_{,} \cos. \alpha_{,}) + P_{,,} (x_{,,} \cos. 6_{,,} - y_{,,} \cos. \alpha_{,,}) + \text{etc.} = 0;$$

ensuite il faut observer que dans cette équation de l'art. 470, les termes

qui se rapportent à μ occupent deux lignes du second membre, dont l'une donne la valeur de la partie de dp qui résulterait d'un mouvement angulaire infiniment petit μ cos. ϕ autour de l'axe des x, et l'autre la partie du même dp dûe à un angle μ sin. ϕ décrit autour de l'axe des y: ces deux mouvements de rotation μ cos. ϕ et μ sin. ϕ autour de l'axe des x et de celui des y, équivalent au mouvement μ autour de l'*axe* x, y, et font le même effet que ce dernier, quel que soit l'ordre dans lequel on les exécute; on peut faire $\mu \sin. \phi = \Omega_{,}$ et $\mu \cos. \phi = \Omega_{,,}$, en désignant par $\Omega_{,}$ et $\Omega_{,,}$ deux arcs infiniment petits, et dont les valeurs sont d'ailleurs arbitraires; on aura $\mu = \sqrt{\Omega_{,}^2 + \Omega_{,,}^2}$, $\sin. \phi = \frac{\Omega_{,}}{\mu}$, $\cos. \phi = \frac{\Omega_{,,}}{\mu}$.

Il suit de l'indépendance de $\Omega_{,}$ et $\Omega_{,,}$ ou des angles μ sin. ϕ et μ cos. ϕ, qu'on doit égaler séparément à zéro les termes qui dérivent de chacun d'eux; ce qui donne les équations

$$P_{,}\,(y_{,} \cos. \gamma_{,} - z_{,} \cos. \beta_{,}) + \text{etc.} = 0,$$
$$P_{,}\,(z_{,} \cos. \alpha_{,} - x_{,} \cos. \gamma_{,}) + \text{etc.} = 0.$$

et voilà les six équations qui renferment toutes les conditions de l'équilibre absolu d'un corps de figure invariable, déduites du principe des vitesses virtuelles.

473. Si le système de forme invariable est assujetti à tourner autour d'un point fixe, on peut prendre ce point pour *origine* et pour *centre*; dès-lors les déplacements des différents points du système seront dûs, uniquement, aux deux mouvements angulaires ω et μ, et il faudra, art. 458, faire dans la valeur de dp, donnée art. 470, $c_{,} = 0$, $c_{,,} = 0$, $c_{,,,} = 0$, au moyen de quoi elle deviendra

$$dp = \begin{cases} \mu \cos. \phi\,(y \cos. \gamma - z \cos. \beta) \\ +\mu \sin. \phi\,(z \cos. \alpha - x \cos. \gamma) \\ +\omega\,(x \cos. \beta - y \cos. \alpha) \end{cases}$$

combinant cette équation avec les équations (b) de l'art. 346, qui sont les équations $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 0$, de l'art. 368, par les procédés indiqués art. 471, on parvient au résultat $\Sigma\,(P\,dp) = 0$; ainsi l'équation déduite du principe des vitesses virtuelles a lieu, lorsque celles qui expriment les conditions de l'équilibre d'un système de forme invariable autour d'un point fixe, sont satisfaites.

On prouvera l'inverse de cette proposition par la marche de raisonnement et de calcul employée art. 472 en ayant égard à l'indépendance des quantités ω, $\mu\cos.\phi$ et $\mu\sin.\phi$.

474. Substituant un axe fixe au point fixe et supposant que cet axe est celui des z, autour duquel se fait le mouvement de rotation ω, on aura $e_{,}=0$, $e_{,,}=0$, $e_{,,,}=0$, $\mu=0$; la valeur de dp deviendra

$$dp=\omega(x\cos.6-y\cos.\alpha)$$

combinant cette valeur avec la première équation (6) art. 346, qui est l'équation $\nu=0$ de l'article 375, on parvient encore au résultat $\Sigma(Pdp)=0$, laquelle se trouve vérifiée lorsque $\nu=0$, et réciproquement.

475. Le système de forme invariable pourrait avoir plusieurs de ses points assujettis à se mouvoir sur des lignes, où des surfaces courbes, fixes et tellement placées qu'un dérangement, infiniment petit, de ce système, ferait parcourir à chacun des points dont je viens de parler un arc de courbe élémentaire, sur la ligne ou la surface qui doit le contenir, sans violer les conditions assignées art. 459 et 460. Si dans cet état de choses, les forces dont le système éprouve l'action sont en équilibre, les lignes et les surfaces fixes qui retiennent une partie de ses points, éprouvent des pressions normales dont on détermine aisément les valeurs, comme je le ferai voir par la suite, quand le nombre des points, ainsi retenus, n'excède pas trois. Soient $N_{,}$, $N_{,,}$, $N_{,,,}$, etc. ces pressions, si on leur substitue des forces équivalentes et agissant en sens contraires, c'est-à-dire représentant les réactions que les points fixes pressés exercent sur le système, on pourra faire abstraction de ces points fixes en supposant le système sollicité par les forces P et par les forces $N_{,}$, $N_{,,}$, $N_{,,,}$, etc. Le principe général donnera alors, l'équation

$$\Sigma(Pdp)+\Sigma(Ndn)=0$$

dn étant la projection de la vitesse virtuelle du point d'application de N sur la direction de cette force N; mais, art. 458, l'arc élémentaire, qui représente cette vitesse virtuelle, doit être pris sur une ligne ou une surface à laquelle N est perpendiculaire, donc la projection $dn=0$, donc $\Sigma(Ndn)=0$, et l'équation donnée par le principe général se réduit à $\Sigma(Pdp)=0$, bien entendu que les facteurs dp ont des valeurs compatibles avec la condition qui assujettit plusieurs des points du système à se mouvoir sur des lignes ou des surfaces fixes.

476. Chacune des forces P appliquée au système, est décomposable en plusieurs autres $Q_{,}$, $Q_{,,}$, etc. et les moments respectifs (art. 457) de celles-ci étant $Q_{,}dq_{,}$, $Q_{,,}dq_{,,}$, etc. on a, art. 464, $Pdp = Q_{,}dq_{,} + Q_{,,}dq_{,,} +$ etc., d'où on voit que lorsqu'on substitue, à un système quelconque de forces, d'autres forces capables, soit de produire le même effet que les premières, soit de leur faire équilibre, si, en conservant leurs intensités et leurs lignes de directions, elles agissaient dans les sens convenables, la somme des moments sera la même dans l'un et l'autre système de forces.

477. $Q_{,}$, $Q_{,,}$, $Q_{,,,}$ étant prises parallèlement aux axes coordonnés, deviendront pour chaque force P, faisant avec les axes des x, y et z, les angles respectifs α, β, γ, les composantes rectangulaires $P \cos. \alpha$, $P \cos. \beta$, $P \cos. \gamma$, dont les moments (art. 457) seront $\delta x. P \cos. \alpha$, $\delta y. P \cos. \beta$, $\delta z. P \cos. \gamma$, en désignant par δx, δy, δz les projections sur les axes des x, y et z, de la distance entre le point d'application de P dans le système A, (art. 455) et son homologue dans le système B, et observant que ces incréments, ou variations, δx, δy, δz doivent, en général, dans les systèmes *continus*, être distingués des différentielles dx, dy, dz qui se rapportent à la distance de deux points, du même système, infiniment près l'un de l'autre, la somme des moments $\Sigma(Pdp)$ ou $\Sigma(P\delta p)$, prendra la forme

$$\Sigma \{ P(\delta x. \cos. \alpha + \delta y. \cos. \beta + \delta z. \cos. \gamma) \}$$

On arriverait immédiatement à ce résultat en désignant par a, b, c, respectivement, les coordonnées parallèles aux x, y et z, de l'origine de la longueur p prise sur la direction de P, et observant qu'on a, x, y et z étant les coordonnées de l'autre extrémité de p, ou du point d'application de P,

$$p = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

d'où on déduit

$$\delta p = \frac{x-a}{p}\,\delta x + \frac{y-b}{p}\,\delta y + \frac{z-c}{p}\,\delta z.$$

on sait que $\frac{x-a}{p} = \cos. \alpha$, $\frac{y-b}{p} = \cos. \beta$, $\frac{z-c}{p} = \cos. \gamma$, donc $\delta p = \delta x \cos. \alpha + \delta y \cos. \beta + \delta z \cos. \gamma$.

L'origine de p est, dans les cas ordinaires des forces de la nature, considérée comme un centre d'où émane l'action de la force P, dont l'intensité est proportionelle à une fonction de la distance p.

Démonstration immédiate du principe des vitesses virtuelles, dans le cas de l'équilibre des forces appliquées à un système funiculaire.

478. Un point quelconque d'un système funiculaire, que je désigne par point $m_{,}$, et qui est soumis à l'action immédiate de la force $P_{,}$, appliquée au système, est, en même temps, tiré suivant différentes directions, par les cordons qui, partant de plusieurs autres points du même système, aboutissent au point $m_{,}$. Les tensions de ces différents cordons peuvent être considérées comme des puissances $t_{,}$, $t_{,,}$, etc. dirigées sur $m_{,}$, et les conditions de l'équilibre exprimées, soit par les équations de l'art. 72, soit par celle de l'art. 88, doivent exister entre les forces $P_{,}$, $t_{,}$, $t_{,,}$, etc.

Soient $t_{,}d\tau_{,}$, $t_{,,}d\tau_{,,}$, etc. les moments (art. 457) des forces ou tensions $t_{,}$, $t_{,,}$, etc., on a, art. 88,

$$P_{,}dp_{,}+t_{,}d\tau_{,}+t_{,,}d\tau_{,,}+\text{etc.}=0$$

et chaque point d'application d'une des forces P fournira une équation pareille, dans laquelle les variations totales $dp_{,}$, $d\tau_{,}$, etc., comprennent la somme des variations partielles dûes, tant au dérangement total du système, qu'au changement des positions respectives de ses différents points.

La somme de toutes ces équations, dans l'étendue entière du système, sera

$$\Sigma(Pdp)+\Sigma(td\tau)=0$$

et en supposant, d'abord, que tous les points d'application des forces sont des *nœuds* fixes sur les cordons, on verra aisément que $\Sigma(td\tau)$ est composée de termes qui, pris deux à deux, sont égaux et de signes contraires. En effet soit $\lambda_{,}$ le cordon, interposé entre le point $m_{,}$ et le point $m_{,}'$, dont la tension fait éprouver à $m_{,}$ l'effort ou action $t_{,}$, il est évident que $m_{,}'$ éprouvera une réaction égale et directement opposée à cette action, ce qui donnera, à chacun de ces points les moments respectifs $+t_{,}d\tau_{,}$, $-t_{,}d\tau_{,}'$; mais, on a de plus; $d\tau_{,}=d\tau_{,}'$, car le cordon $\lambda_{,}$ qui doit toujours, art. 460, être tendu et conserver sa longueur, n'éprouvant, par le dérangement du système, qu'un changement de position infiniment petit, soit quant à l'angle qu'il décrit dans l'espace, soit quant à sa translation dans le sens longitudinal, les projec-

tions $d\tau_{,}$ et $d\tau_{,}'$, faites sur sa direction primitive, des espaces élémentaires parcourus par ses extrémités $n_{,}$ et $n_{,}'$, ne diffèrent entr'elles que par des quantités du second ordre, fonctions de sinus verses d'angles infiniment petits.

On a donc $d\tau_{,} = d\tau_{,}'$ d'où $t_{,}d\tau_{,} - t_{,}'d\tau_{,}' = 0$, et comme $\Sigma(td\tau)$ est composée de couples de termes pareils on a, par suite, $\Sigma(td\tau) = 0$, ce qui réduit l'équation précédente à

$$\Sigma(P\,dp) = 0$$

ou à l'égalité, pure et simple, à zéro, des moments des forces extérieures appliquées au système.

Soit maintenant le point $m_{,}$ un anneau traversé par un cordon qui aboutit, d'une part, au point $m_{,}'$ et de l'autre au point $m_{,}''$; $\lambda_{,}'$ et $\lambda_{,}''$ étant, respectivement, les longueurs de cordon entre $m_{,}$ et $m_{,}'$, et entre $m_{,}$ et $m_{,}''$; si l'anneau ne coulait pas sur ce cordon, on aurait deux couples de moments égaux et de signes contraires relatifs aux variations de $\lambda_{,}'$ et $\lambda_{,}''$, couples que je désigne, respectivement, par μ' et μ''; mais l'anneau étant supposé couler et parcourir, dans le sens de la longueur du cordon, un espace infiniment petit $d\omega$ il faut ajouter cet espace à la variation de $\lambda_{,}'$ et le retrancher de la variation de $\lambda_{,}''$; cette circonstance change la somme $\mu' + \mu''$ des moments dûs à la tension commune $t_{,}$ de $\lambda_{,}'$ et $\lambda_{,}''$, en $\mu' + \mu'' + t_{,}d\omega - t_{,}d\omega$ somme qui est nulle puisque, d'après ce qui précède, $\mu' = 0$ et $\mu'' = 0$.

Ainsi on arrive encore, dans le cas ou le système a des cordons traversant des anneaux, à l'équation $\Sigma(P\,dp) = 0$; cette équation est généralement satisfaite, dans le système funiculaire, lorsqu'on suppose que l'équilibre a lieu.

479. On démontre l'inverse de cette proposition par le raisonnement suivant, qui pourra généralement, s'appliquer, dans la même circonstance, à toute espèce de système. Je suppose les intensités, les sens d'actions et les directions des forces tels qu'on ait $\Sigma(P\,dp) = 0$, sans avoir d'autre preuve de l'existence de l'équilibre. Si cet équilibre n'était pas assuré par l'égalité à zéro de la somme des moments, les points du système pourraient se déplacer et parcourir, dans le premier instant, des espaces infiniment petits, que je désigne par $d\omega_{,}$, $d\omega_{,,}$, etc.; $d\omega_{,}$ se rapportant au point d'application de $P_{,}$, etc.; mais on établirait l'équilibre, que les forces P sont censées ne pas donner, en appliquant

au

au système d'autres forces $\Pi_{,}, \Pi_{,,}, \Pi_{,,,}$, etc. dirigées respectivement, suivant les lignes $d\omega_{,}$, $d\omega_{,,}$, etc. en sens contraire des mouvements des points qui décrivent ces lignes. Dès-lors on aurait l'équation

$$(1) \ldots\ldots \Sigma(P\,dp) + \Pi_{,}d\pi_{,} + \Pi_{,,}d\pi_{,,} + \text{etc.} = 0$$

($\Pi_{,}\,d\pi_{,}$, étant le moment de la force $\Pi_{,}$ et ainsi des autres) laquelle, par la condition présupposée de $\Sigma(P\,dp) = 0$, se réduit à

$$(2) \ldots\ldots \Pi_{,}d\pi_{,} + \Pi_{,,}d\pi_{,,} + \text{etc.} = 0$$

les mouvements, $d\omega_{,}$, $d\omega_{,,}$, etc. étant censés s'opérer sans que les conditions du système soient violées, ou étant compatibles avec ces conditons, je puis, eu égard aux valeurs arbitraires qu'elles comportent, considérer $d\omega_{,}$, $d\omega_{,,}$, etc. comme les vîtesses virtuelles des points d'applications des forces, au moyen de quoi l'équation (2) se change en

$$(3) \ldots\ldots \Pi_{,}d\omega_{,} + \Pi_{,,}d\omega_{,,} + \text{etc.} = 0$$

et tous ses termes deviennent négatifs. Or la somme de plusieurs termes de même signe ne peut être égale à zéro sans que chacun de ces termes, en particulier, ne soit nul. On a donc $\Pi_{,}d\omega_{,} = 0$, etc. ce qui suppose ou $\Pi_{,} = 0$, etc. ou $d\omega_{,} = 0$, etc. Dans la première hypothèse chacune des forces nécessaires pour arrêter le mouvement présupposé est nulle, dans la seconde hypothèse ce mouvement n'a pas lieu; il n'existe donc dans aucun cas, et l'équation $\Sigma(P\,dp)$ suffit pour assurer l'équilibre.

Exemple tiré du polygone funiculaire, duquel on déduit, en le généralisant, l'emploi à faire des équations de condition d'un système, combinées avec l'équation donnée par le principe des vîtesses virtuelles, pour trouver les conditions particulières de l'équilibre de ce système, et les efforts provenants des actions et des réactions que les différents points du système exercent les uns sur les autres.

480. La méthode employée dans l'analyse suivante, qui a le polygone funiculaire pour objet particulier, peut fort aisément être généralisée et appliquée à un système quelconque. Cette méthode est celle par laquelle l'auteur de la *Mécanique analytique* a fait, du principe des vîtesses virtuelles, ce qu'on pourrait appeller un instrument universel pour la solution de tous les problèmes d'équilibre et même des problèmes de

mouvement, comme je le ferai voir par la suite; elle mérite toute l'attention des élèves.

P étant une force, appliquée à un des sommets d'angle du polygone funiculaire, et faisant avec les axes des x, y et z, les angles α, 6 et γ, je fais $P\cos.\alpha=\phi$, $P\cos.6=\chi$, $P\cos.\gamma=\psi$, les lettres ϕ, χ et ψ devant, aux différents points du système, porter les mêmes accents que les lettres P, α, 6 et γ.

D'après cette notation on pourra, art. 477, écrire, de la manière suivante l'équation générale d'équilibre

$$\left.\begin{array}{l}\phi_{,}\delta x_{,}+\phi_{,,}\delta x_{,,}+\text{etc.}\\ +\chi_{,}\delta y_{,}+\chi_{,,}\delta y_{,,}+\text{etc.}\\ +\psi_{,}\delta z_{,}+\psi_{,,}\delta z_{,,}+\text{etc.}\end{array}\right\}=0$$

481. Il s'agit maintenant d'introduire, dans cette équation, les conditions qui caractérisent le système funiculaire et on a vu, art. 391, que ces conditions s'expriment par les équations

$$(1)\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l}\lambda_{,}=\{(x_{,,}-x_{,})^2+(y_{,,}-y_{,})^2+(z_{,,}-z_{,})^2\}^{\frac{1}{2}}\\ \lambda_{,,}=\{(x_{,,,}-x_{,,})^2+(y_{,,,}-y_{,,})^2+(z_{,,,}-z_{,,})^2\}^{\frac{1}{2}}\\ \lambda_{,,,}=\{(x_{,,,,}-x_{,,,})^2+(y_{,,,,}-y_{,,,})^2+(z_{,,,,}-z_{,,,})^2\}^{\frac{1}{2}}\\ \text{etc.}\qquad\qquad\text{etc.}\qquad\qquad\text{etc.}\end{array}\right.$$

$\lambda_{,}$, $\lambda_{,,}$, etc. étant les longueurs du 1er, 2e, etc. côtés; $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, $x_{,,}$, $y_{,,}$, $z_{,,}$, etc. les coordonnées du 1er, 2me, etc. point (voyez art. 394).

Prenant les variations de ces équations on a

$$(2)\ldots\left\{\begin{array}{l}\dfrac{(x_{,,}-x_{,})(\delta x_{,,}-\delta x_{,})+(y_{,,}-y_{,})(\delta y_{,,}-\delta y_{,})+(z_{,,}-z_{,})(\delta z_{,,}-\delta z_{,})}{\lambda_{,}}=0\\ \dfrac{(x_{,,,}-x_{,,})(\delta x_{,,,}-\delta x_{,,})+(y_{,,,}-y_{,,})(\delta y_{,,,}-\delta y_{,,})+(z_{,,,}-z_{,,})(\delta z_{,,,}-\delta z_{,,})}{\lambda_{,,}}=0\\ \dfrac{(x_{,,,,}-x_{,,,})(\delta x_{,,,,}-\delta x_{,,,})+(y_{,,,,}-y_{,,,})(\delta y_{,,,,}-\delta y_{,,,})+(z_{,,,,}-z_{,,,})(\delta z_{,,,,}-\delta z_{,,,})}{\lambda_{,,,}}=0\\ \text{etc.}\qquad\qquad\qquad\qquad\text{etc.}\end{array}\right.$$

je multiplie la 1re de ces équation par $t_{,}$, la 2e par $t_{,,}$, la 3e par $t_{,,,}$, etc. $t_{,}$, $t_{,,}$, $t_{,,,}$, etc. étant des quantités indéterminées, j'ajoute les équations produits à l'équation de l'article précédent, et j'égale, séparément, à zéro, dans l'équation somme, les coëfficients de chaque variation, ce qui me donne

Point n°. 1
$$\left\{\begin{array}{l}
\phi_{,} - t_{,}\dfrac{x_{,,}-x_{,}}{\lambda_{,}} = 0 \\[2ex]
\chi_{,} - t_{,}\dfrac{y_{,,}-y_{,}}{\lambda_{,}} = 0 \\[2ex]
\psi_{,} - t_{,}\dfrac{z_{,,}-z_{,}}{\lambda_{,}} = 0
\end{array}\right.$$

Point n°. 2
$$\left\{\begin{array}{l}
\phi_{,,} + t_{,}.\dfrac{x_{,,}-x_{,}}{\lambda_{,}} - t_{,,}\dfrac{x_{,,,}-x_{,,}}{\lambda_{,,}} = 0 \\[2ex]
\chi_{,,} + t_{,}.\dfrac{y_{,,}-y_{,}}{\lambda_{,}} - t_{,,}.\dfrac{y_{,,,}-y_{,,}}{\lambda_{,,}} = 0 \\[2ex]
\psi_{,,} + t_{,}.\dfrac{z_{,,}-z_{,}}{\lambda_{,}} - t_{,,}\dfrac{z_{,,,}-z_{,,}}{\lambda_{,,}} = 0
\end{array}\right.$$

Point n°. 3
$$\left\{\begin{array}{l}
\phi_{,,,} + t_{,,}\dfrac{x_{,,,}-x_{,,}}{\lambda_{,,}} - t_{,,,}\dfrac{x_{,,,,}-x_{,,,}}{\lambda_{,,,}} = 0 \\[2ex]
\chi_{,,,} + t_{,,}\dfrac{y_{,,,}-y_{,,}}{\lambda_{,,}} - t_{,,,}\dfrac{y_{,,,,}-y_{,,,}}{\lambda_{,,,}} = 0 \\[2ex]
\psi_{,,,} + t_{,,}\dfrac{z_{,,,}-z_{,,}}{\lambda_{,,}} - t_{,,,}\dfrac{z_{,,,,}-z_{,,,}}{\lambda_{,,,}} = 0
\end{array}\right\} \ldots (3)$$

: : : : : : : : : : : : : : : : : : : :

Dernier point, le nombre des côtés étant n, et celui des points, $n+1$.
$$\left\{\begin{array}{l}
\phi_{(n)} + t_{(n-1)}\dfrac{x_{(n)}-x_{(n-1)}}{\lambda_{(n-1)}} - t_{(n)}\dfrac{x_{(n+1)}-x_{(n)}}{\lambda_{(n)}} = 0 \\[2ex]
\chi_{(n)} + t_{(n-1)}.\dfrac{y_{(n)}-y_{(n-1)}}{\lambda_{(n-1)}} - t_{(n)}\dfrac{y_{(n+1)}-y_{(n)}}{\lambda_{(n)}} = 0 \\[2ex]
\psi_{(n)} + t_{(n-1)}\dfrac{z_{(n)}-z_{(n-1)}}{\lambda_{(n-1)}} + t_{(n)}\dfrac{z_{(n+1)}-z_{(n)}}{\lambda_{(n)}} = 0
\end{array}\right.$$

482. Ces équations sont de la même forme que celles de l'art. 396 ; les quantités ϕ, χ, ψ, $\dfrac{x_{,}-x}{\lambda}$, $\dfrac{y_{,}-y}{\lambda}$, $\dfrac{z_{,}-z}{\lambda}$, accentuées n°. 1, 2, etc. sont respectivement égales aux quantités $P\cos\alpha$, $P\cos\beta$, $P\cos\gamma$, $\cos\alpha$, $\cos\beta$ $\cos\gamma$, portant les mêmes accents, et les indéterminées t par lesquelles on a multiplié les variations des équations de condition, représentent les tensions des différents cordons. La combinaison du principe des vitesses virtuelles avec les équations de condition du polygone funiculaire, donne donc les équations fondamentales de l'équilibre de

ce polygone, et on a ainsi une seconde démonstration de l'inverse de la proposition démontrée art. 478.

483. L'utilité principale de l'analyse exposée dans les art. 480, 481 et 482 consiste dans la méthode qu'on en déduit en la généralisant, méthode que nous devons à l'auteur de la *Mécanique analytique*, ainsi que j'en ai déjà prévenu. « Connaissant les équations qui expriment les « lois de la *constitution* d'un système quelconque, pour trouver les « conditions de son équilibre, ayez les différentielles du premier ordre « de ces équations que vous obtiendrez soit par la différentiation, si « les équations sont données sous la forme finie, soit par l'intégration « si on ne connaît que leurs différentielles d'un ordre plus élevé que « le premier; multipliez chacune de ces différentielles du premier ordre, « que $dQ=0$ est supposée représenter, par un coëfficient indéterminé « K, et ajoutez $\Sigma(KdQ)=0$ à l'équation générale $\Sigma(Pdp)=0$, fournie « par le principe des vitesses virtuelles; égalez séparément à zéro, dans « l'équation $\Sigma(Pdp)+\Sigma(KdQ)=0$, le coëfficient de la différen« tielle de chaque variable, et éliminant les coëfficients indéterminés « K, entre les équations ainsi obtenues, l'une desquelles est désignée « par $\Omega=0$, les équations délivrées des quantités K, et représentées « en général par $\omega=0$, donneront les relations entre les puissances et « les variables du système, qui doivent avoir lieu dans le cas de l'équi« libre; de plus les quantités K représenteront les efforts que les diverses « parties du système ont à supporter, d'après la constitution de ce sys« tème, les actions combinées et les points d'application des forces. »

Le nombre des équations de condition du système étant égal à m, et celui des points d'application des forces égal à n, si les variables des équations $dQ=0$ et $\Sigma(Pdp)=0$ sont les coordonnées de ces points, l'égalité à zéro des coëfficients des différentielles de ces coordonnées dans l'équation $\Sigma(Pdp)+\Sigma(KdQ)=0$, donnera un nombre n d'équations $\Omega=0$, que l'élimination des m indéterminées K réduira à un nombre $n-m$ d'équations $\omega=0$, délivrées de ces indéterminées K; mais ces équations $\omega=0$, étant combinées avec les m équations de condition, on aura un nombre n d'équations, sans K, égal à celui des coordonnés des points du système, dont on pourra ainsi calculer les valeurs, lorsque les puissances seront connues en quantités, directions et sens d'action.

Démonstration immédiate du principe des vitesses virtuelles, dans le cas de l'équilibre de l'espèce de système à laquelle se rapportent, en général, les *machines*.

484. Le principe des vitesses virtuelles a été, dès long-temps, apperçu dans l'équilibre des *machines*, et quelques-unes d'entr'elles le rendent presque évident. On en déduit les maximes fondamentales qui dirigent les constructeurs éclairés, et je crois devoir préparer les élèves à l'étude de la section de cet ouvrage, où je traiterai de l'équilibre des principales *machines*, en leur démontrant les conditions générales de cet équilibre indépendantes de tout mécanisme particulier, ou applicables à un mécanisme quelconque.

Il faut d'abord définir le système dont je vais parler, et assigner les *conditions* auxquelles sa *constitution* est soumise.

485. Une *machine* est une espèce de système qui sert à transmettre l'action d'une force appellée *moteur*, appliquée à l'un de ses points, à un autre point du même système, qu'il s'agit de mettre en mouvement en surmontant une *résistance*, ou une seconde force appliquée à ce dernier point. La mesure de ce qu'on appelle *l'effet utile* de la *machine*, tient à des considérations de mouvement, dont il n'est pas encore temps de parler aux élèves, et je me borne, dans cette première partie du cours, à la recherche des conditions de l'équilibre entre le *moteur* et la *résistance*, recherche qui est un préliminaire indispensable pour la détermination de *l'effet utile*.

486. La condition, qui caractérise l'espèce de système dont je parle, consiste, en ce qu'un mouvement déterminé du point d'application du moteur, donne un mouvement, pareillement déterminé, (quoiqu'en général différent de l'autre) non-seulement au point d'application de la résistance, mais à toutes les parties du système, ou *pièces* de la *machine*, employées à transmettre au second point, l'action qui s'exerce au premier.

Dans le cas où les forces appliquées à ces points, que j'appellerai *points extrêmes* du système, sont en équilibre, et que, par conséquent, les pièces *intermédiaires* exercent des efforts ou *pressions* les unes sur les autres, un mouvement déterminé d'une de ces pièces, donne aussi des mouvements déterminés à toutes les autres et aux points extrêmes.

487. Pour fixer les idées, on peut concevoir une suite de corps dont chacun, pouvant prendre un mouvement qui lui est particulier, a deux de ses points en contact, l'un avec le corps *précédent*, et l'autre avec le corps *suivant*. C'est par le moyen de ces points de contact que le changement de position d'un des corps ou d'une des pièces du système ou de la machine, occasionne un changement de position correspondant dans tous les autres corps ou toutes les autres pièces.

488. Les points de contact, dont je viens de parler, peuvent être des *articulations* telles que dans un dérangement de deux pièces contigues de la machine, ces points, par lesquels elles se touchent, ne se séparent pas et décrivent un même arc de courbe.

489. Ces mêmes points de contact peuvent se trouver sur deux surfaces courbes appartenant, respectivement, aux deux pièces contigues, et glissant l'une sur l'autre, lorsque ces pièces changent de position; dans ce cas, les points qui se touchaient d'abord, peuvent se séparer, après le dérangement des pièces contigues, (les surfaces continuant toujours à glisser l'une sur l'autre) et décrire chacun des arcs de courbe particuliers, dont les formes dépendent des mouvements que les corps auxquels ils appartiennent sont capables de prendre.

490. Je fais abstraction de certaines résistances qui, lorsqu'on a égard à l'état physique des choses, doivent entrer en considération dans les calculs relatifs à l'équilibre et au mouvement des machines, et sur lesquelles je donnerai les détails nécessaires, dans la quatrième section de cette première partie du cours. Ces résistances sont celles qu'on désigne par les mots *adhésion*, *frottement*, *roideur* des cordes et des chaînes. Il est nécessaire de les regarder comme nulles, si on veut que l'*immobilité* du système, sollicité par des forces, représente rigoureusement son *équilibre*, et que, dans cet état d'équilibre, les conditions énoncées art. 459, soient satisfaites, c'est-à-dire qu'il n'y ait pas de force, si petite qu'on la suppose, qui, agissant à un point d'articulation ou de contact, ne produise un mouvement général dans le système.

491. Ainsi le mot *résistance* sera, dans ces premières notions générales sur les machines, employé uniquement à désigner la force appliquée au point de la machine que le moteur doit mettre en mouvement pour obtenir l'*effet utile* de cette machine.

492. Ces préliminaires posés, je vais d'abord prouver que l'équilibre

ayant lieu entre le moteur et la résistance, l'équation du principe des vitesses virtuelles est satisfaite tant lorsque les parties, ou pièces de la machine agissent les unes sur les autres par des *contacts* de surfaces que lorsqu'elles sont liées à *articulations*.

Concevons une suite de n corps solides, désignés respectivement par m', m'', m''', etc. $m^{(n)}$ qui, ainsi que je l'ai dit plus haut, forment un système tel, que si le premier corps m' prend un mouvement déterminé, tous les autres prennent aussi des mouvements déterminés. Une force P est appliquée à un point du corps m', que je nommerai point μ'; ce même corps m' est en contact avec le corps m'' par un point θ', lequel presse un point μ'' du corps m''; ce dernier corps presse par un de ses points θ'' le point μ''' de m''' etc.

Enfin le point d'application de la résistance R, qui se trouve sur le corps $m^{(n)}$, sera désigné par $\theta^{(n)}$, $(^{n})$ étant un numero d'accentuation.

J'observe maintenant que le corps m', si on en séparait le reste du système, conserverait son équilibre particulier, pourvu qu'il continuât à éprouver, au point μ', l'action de la force P, et, au point θ', une action, normale à la surface qui renferme ce point, équivalente à celle que ce même point reçoit de la part du corps m''; désignant cette pression normale par N', concevant que le corps m' éprouve un dérangement infiniment petit, qui, d'après les conditions ci-dessus assignées, fait parcourir au point μ', sur une courbe déterminée, et au point θ' sur une autre courbe pareillement déterminée, des arcs élémentaires que je désigne respectivement par $d\nu'$ et $d\epsilon'$, on a, dp et dn' étant les projections de $d\nu'$ et $d\epsilon'$ sur les directions de P et de N' l'équation

$$P\,dp + N'\,dn' = 0$$

cette équation doit, quelques soient les conditions auxquelles le mouvement de m' est assujetti, trouver sa démonstration, soit à l'art. 468 soit à l'un de ceux qui le suivent jusqu'à l'art. 475 inclusivement.

Pareillement le corps m'', si on en séparait le reste du système, conserverait aussi son équilibre particulier, pourvu qu'il continuât à éprouver, au point μ'', une pression normale égale à N', et, au point θ'', une pression normale équivalente à celle que ce même point reçoit de la part du corps m'''. Désignant par N'' cette pression normale, par $d\nu''$, $d\epsilon''$ et dn'' les quantités correspondantes à $d\nu'$, $d\epsilon'$ et dn', représentant,

de plus, par dn', la projection de $d\nu''$ sur la direction de N', on a,

$$N'\,dn'_{,} + N''\,dn'' = 0$$

Les corps ou pièces de la machine m''', m'''', etc. fourniront des équations semblables,

$$N''\,dn''_{,} + N'''\,dn''' = 0$$
$$N'''dn'''_{,} + N''''\,dn'''' = 0$$
etc.

et le corps $m^{(n)}$, où se trouve le point $\theta^{(n)}$ d'application de la résistance, donnera la dernière équation

$$N^{(n-1)}\,dn_{,}^{(n-1)} + R\,dr = 0$$

dr est la projection, sur la direction de R, de l'élément de courbe parcouru par son point d'application $\theta^{(n)}$.

Ajoutant toutes les équations précédentes on a

$$(1)\ldots\ P\,dp + N'(dn' + dn'_{,}) + N''(dn'' + dn''_{,}) + \text{etc.}\ldots + R\,dr = 0$$

et je vais prouver que chacun des termes de la forme $N(dn + dn_{,})$ est, en particulier, égal à zéro; la preuve donnée pour l'un de ces termes sera applicable à tous les autres.

493. J'appelle surface ε la partie de la surface du corps m' sur laquelle se trouve le point θ', et surface ν, la partie de la surface du corps m'' sur laquelle se trouve le point μ''; ces surfaces ε et ν sont censées comprendre autour des points θ' et μ'' par lesquels elles se touchent, des aires courbes de grandeur quelconque mais dont toutes les sections planes, faites par ces mêmes points, sont des courbes *continues*; je mène à ε et ν, avant que le système ait éprouvé le dérangement infiniment petit auquel sont dûs les moments $N'dn'$ et $N'dn'_{,}$, un plan tangent commun qui renferme, par conséquent, θ' et μ'', et désignant ce plan par *plan* T, je le considère comme fixe dans l'espace. Après le dérangement du système, les points θ' et μ'' sont à des distances respectives dn' et $dn'_{,}$ du plan fixe T, et les surfaces ε et ν ont un nouveau point de contact; je nomme dh la distance de ce dernier point au plan T, ds sa distance au point θ', et $d\sigma$ sa distance au point μ''; les lignes ds et $d\sigma$ ont, en vertu du mouvement du système, décrit dans l'espace, des angles infiniment petits; représentant respectivement par dr et $d\rho$ leurs inclinaisons sur le plan T après le dérangement, on a

dn'

$$dn' = dh + ds\,dr$$
$$dn'_{,} = dh + d\sigma\,d\rho$$

et en retranchant ces équations l'une de l'autre

$$dn' = dn'_{,} + ds\,dr - d\sigma\,d\rho$$

équation qui revient à $dn' = dn'_{,}$ en négligeant les quantités d'un ordre supérieur au premier.

Si on observe, maintenant, que les moments $N'dn'$ et $N'dn'_{,}$ sont toujours de signes différents, il sera manifeste que chacun des termes de la forme $N(dn + dn_{,})$ est, en particulier, égal à zéro *C. Q. F. D.*

494. La vérité du résultat auquel je viens de parvenir, dans le cas général où les pièces du système agissent, les unes sur les autres, par contacts de surfaces, est manifeste dans le cas particulier où ces pièces sont réunies à *articulations*, et où un dérangement du système fait parcourir le même arc élémentaire de courbe aux points θ' et μ''; cet arc de courbe, peut être représenté par dn' ou $dn'_{,}$, qui n'étaient d'abord que des projections, et qui sont ici les vîtesses virtuelles même, dont la direction commune se confond avec celles de l'action et de la réaction, égales entr'elles et désignées par N', que les deux pièces contigues du système exercent, l'une sur l'autre, dans le sens du mouvement que peut prendre leur point d'*articulation*.

On a donc immédiatement, $N'dn'$ et $N'dn'_{,}$ étant des moments égaux et de signes contraires, $N'(dn' + dn'_{,}) = 0$, et chacun des autres termes dûs aux pressions N donne une équation semblable.

495. Ainsi, quelque soit le mode de transmission, par le moyen d'une machine quelconque, de l'action du *moteur* au point d'application de la *résistance*, on a toujours, dans le cas de l'équilibre, l'équation $Pdp = Rdr$, telle qu'on la déduirait du principe des vîtesses virtuelles. On a, depuis long-temps, démontré ce théorême dans quelques cas particuliers, (voyez la section 9 de la mécanique de Varignon, imprimée en 1725), mais il était bon d'en rendre la démonstration générale et indépendante de toute considération de mécanisme qui n'aurait qu'une machine, ou une seule espèce de machine pour objet.

496. Les incréments dp et dr sont, dans les cas de pratique les plus ordinaires, les vîtesses virtuelles mêmes des points d'application de P et de R, qui se trouvent ainsi dirigées dans le sens des lignes que le méca-

nisme de la machine permet à ces points de parcourir; une machine doit aussi, en général, être constituée de manière que l'équation $P dp = R dr$, soit vérifiée lorsqu'on substitue des espaces finis aux espaces élémentaires dp et dr, et on éprouve des pertes sur *l'effet utile* de celles où cette condition n'est pas remplie. Je donnerai, dans la 2e. partie du cours, quelques développements sur ces propositions.

Le système pour lequel on vient d'assigner les conditions d'équilibre entre un *moteur* et une *résistance*, est considéré sous un point de vue plus général, et, de plus, on le suppose soumis à l'action d'un nombre quelconque de forces. Rapport entre le nombre des équations de condition de ce système et celui des variables auxquelles on rapporte les positions respectives de ses différents points.

497. Je vais envisager le système dont il a été question dans les art. précédents, sous un point de vue plus général, et supposer que chacune des pièces de ce système est unie, par *contact* ou *articulation*, à un nombre quelconque d'autres pièces, et que, de plus, tous ces points de *contact* ou d'*articulation*, sont sollicités par des forces extérieures, la *constitution* de ce système étant toujours telle qu'un mouvement déterminé d'un de ses points donne des mouvements pareillement déterminés, quoique différents entr'eux, à tous les autres points.

m', m'', m''', etc. désignant, comme précédemment, les différents corps du système, le corps m' est sollicité par les forces $P'_{,}$, $P'_{,,}$, $P'_{,,,}$, etc. aux points $\theta'_{,}$, $\theta'_{,,}$, $\theta'_{,,,}$, où il se trouve uni, soit par *contact*, soit par *articulation*, avec les corps m', m'', m''', etc. soient $N'_{,}$, $N'_{,,}$, $N'_{,,,}$, etc. les pressions normales aux éléments de courbes que $\theta'_{,}$, $\theta'_{,,}$, $\theta'_{,,,}$, etc. sont assujettis à parcourir, lorsqu'un des points du système éprouve un dérangement, on aura, art. 468 et suivants, pour le corps m', dans le cas de l'équilibre une équation de la forme

$$P'_{,}dp'_{,} + P'_{,,}dp'_{,,} + \text{etc.} + N'_{,}dn'_{,} + N'_{,,}dn'_{,,} + \text{etc.} = 0$$

et les autres corps du système donneront des équations semblables.

Si on réunit toutes ces équations, l'équation-somme représentant l'équation (1) de l'art. 492, contiendra $\Sigma(P dp)$ et une suite de termes de la forme $N(dn + dn')$, dont chacun se composera, comme à l'art. cité, des moments respectifs Ndn et Ndn' d'une pression normale commune à deux corps contigus. On pourra donc appliquer, à cette couple de moments $N(dn + dn')$, les raisonnements et les constructions de

l'art. 493, et on arrivera au résultat $\Sigma \{ N(dn + dn') \} = 0$, d'où on conclura l'équation $\Sigma (Pdp) = 0$, telle que la donne le principe des vitesses virtuelles.

498. Les preuves des propositions inverses de celles qui ont été démontrées depuis l'art. 492, s'obtiennent par des raisonnements absolument semblables à celui de l'art. 479.

499. Il me reste à examiner, relativement au système dont je viens de m'occuper, comme je l'avais fait pour ceux dont il a été question avant l'art. 484, quel est le rapport entre le nombre des variables auxquelles on rapporte les positions respectives des différents points d'application des forces, et le nombre des équations de condition qui existent entre ces variables. Ce rapport se déduit bien simplement de l'hypothèse faite sur la *constitution* du système ; puisqu'un mouvement déterminé d'un des points donne lieu à des mouvements pareillement déterminés de tous les autres, on doit avoir un nombre d'équations entre les variables auxquelles on rapporte les positions de ces points, tel que la connaissance d'une de ces variables suffise pour avoir les valeurs de toutes les autres ; il faut donc que le nombre des variables excède d'une unité seulement le nombre des équations.

500. J'observerai, avant d'aller plus loin, que j'ai spécialement considéré les moments, depuis l'art. 484, comme dûs aux changements de forme du système, ou aux variations des distances respectives entre les corps qui le composent, et on peut, en général, ne les envisager que sous ce point de vue relativement aux systèmes dont il est question depuis l'article cité jusqu'à l'art. 496. Cependant les raisonnements et les démonstrations qui précèdent n'en sont pas moins applicables aux moments pris avec leurs valeurs complètes, comprenant la partie dûe au changement de position que le système peut prendre en conservant sa forme, ainsi qu'on le verra expliqué ci-après art. 503.

J'ajouterai que les raisonnements et l'analyse consignés dans les six articles qui précèdent l'art. 484, s'adaptent immédiatement aux valeurs complètes des moments.

Généralisation du principe des vitesses virtuelles.

501. La théorie que j'ai exposée depuis l'art. 454 et les applications que j'en ai faites à différentes espèces de système, fournissent les moyens

de démontrer que l'équation déduite du principe des vîtesses virtuelles est généralement satisfaite lorsqu'un système quelconque de corps *solides* est en équilibre. Avant d'entrer dans quelques détails, à cet égard, j'observerai que tout ce qui a été dit, depuis l'art. 386, sur l'équilibre d'un système de cordons parfaitement flexibles et inextensibles, est applicable aux cas où ces cordons deviendraient des verges rigides inflexibles, tenant les unes aux autres par des *articulations* placées aux points qui répondent aux extrémités ou aux sommets d'angles des cordons. J'ajouterai qu'après cette transformation du système, l'équilibre subsisterait encore si, conservant les intensités et les lignes de direction des forces, on changait le sens de l'action de chacune de ces forces. Par l'effet de ce changement, les forces qui tenaient un cordon tendu, en tirant ses extrémités dans des sens opposés, agiraient sur ces mêmes extrémités de manière à les rapprocher si la verge était compressible, mais les équations d'équilibre n'en auraient pas moins la même forme dans l'un et l'autre système auxquels on pourrait appliquer indistinctement la première partie des raisonnements consignés dans l'art. 478, où on a prouvé que le principe des vîtesses virtuelles avait lieu dans l'équilibre du système funiculaire.

502. Enfin la démonstration de l'art. 478, considérée relativement à un système funiculaire, a lieu non seulement lorsque les cordons sont parfaitement inextensibles, mais encore lorsqu'ils sont élastiques et extensibles en vertu de cette élasticité, suivant des lois quelconques. Cette circonstance introduit dans l'équilibre général d'un pareil système, la condition de l'équilibre particulier, pour chaque cordon, entre les composantes qui agissent dans la direction de ce cordon et la force élastique qui tend à rapprocher ses extrémités, et lorsque cette condition est remplie, et que tous les cordons ont pris le degré d'extension que comportent les actions des forces, on doit, d'après ce qui est dit, art. 461, en les considérant sous le point de vue de l'application du principe des vitesses virtuelles, raisonner comme s'ils étaient inextensibles.

Des observations semblables s'appliquent aux cas des verges susceptibles de contraction dans le sens de leurs longueurs, de flexions, etc.

503. Qu'on ait, maintenant, un système quelconque en équilibre, auquel on fasse subir un changement de position infiniment petit,

compatible avec les conditions auxquelles sa *constitution* est soumise; la projection dp, sur la direction d'une des forces P appliquées au système, de la *vitesse virtuelle* du point d'application de cette force ou de l'espace élémentaire que le dérangement de ce point lui aura fait parcourir, pourra, d'après ce qui est dit art. 462, être regardée comme composée d'une partie dq dûe au changement général de position que le système peut prendre en conservant sa forme, et d'une autre partie dr, dûe à son changement de forme, de manière qu'on ait $dq + dr = dp$, et il s'agit de prouver que, dans tous les cas,

$$\Sigma(P\,dq) + \Sigma(P\,dr) = \Sigma(P\,dp) = 0.$$

$\Sigma(P\,dq)$ étant le résultat d'un dérangement dans lequel tout se passe de la même manière que si la forme du système était invariable, et qui permet de la supposer telle, on doit appliquer à cette somme tout ce qui est démontré art. 468 et suivants, sur la somme des moments (art. 457) d'un système de forme invariable, en équilibre, ainsi on a $\Sigma(P\,dq) = 0$. Cette équation aurait pu se conclure de ce qui est dit art. 384 où on a vu que des forces en équilibre sur un système de forme invariable, doivent d'abord satisfaire aux conditions de l'équilibre d'un système de forme invariable, auxquelles il faut ensuite ajouter d'autres conditions relatives à la *constitution* particulière de ce système.

504. Il reste à prouver que $\Sigma(P\,dr) = 0$, le produit $P\,dr$ étant le moment d'une des forces P appliquées au système, dû au changement de forme de ce système. Si je considère le point d'application de P comme sollicité par cette force P et par plusieurs autres forces Π équivalentes, à tous égards, aux efforts que le point dont il s'agit a à supporter en vertu de sa liaison avec les autres points du système, faisant le moment d'une de ces dernières forces égal à $\Pi\,d\rho$, l'équilibre particulier, qui existe entre les forces P et Π, permet de regarder leur point de concours comme libre, et donne entr'elles une équation de la forme de celle de l'art. 87; prenant la somme de ces équations, on a, dans l'étendue entière du système,

$$\Sigma(P\,dr) + \Sigma(\Pi\,d\rho) = 0$$

observons maintenant que deux points quelconques d'application des forces P et Π agissent l'un sur l'autre par l'intermède de corps, faisant partie du système, qui appartiennent, ou par leur mode effectif de com-

position, ou par les effets qu'ils produisent, à la classe des moyens suivants de transmission des forces, savoir : des verges rigides et inflexibles, des liens flexibles susceptibles, ou non, d'extension et de compression, enfin des combinaisons de pièces qui se pressent réciproquement par des *articulations* ou par des contacts de surfaces.

D'après la démonstration donnée art. 478 et, en ayant égard, pour la généraliser, à ce qui est dit art. 460, 461, 501 et 502 on voit que dans les deux premiers cas de la liaison des points dont il s'agit, qui aurait lieu soit par le moyen d'une verge rigide soit par un autre lien flexible mais *continu*, ces deux points, ou donneraient entr'eux, une couple de moments égaux et de signes contraires, ou donneraient, avec un troisième point, deux couples de moments dont la somme serait égale à zéro ; ainsi tous les points, liés de cette manière, ne fournissent aucun terme à la somme $\Sigma(\Pi d\rho)$.

505. Dans les deux cas, dont je viens de parler, ou les projections des vitesses virtuelles de deux points entre lesquels il y a action et réaction, sur la droite qui joint ces deux points, sont égales entr'elles, ou bien la somme des projections de la vitesse virtuelle d'un de ces points, (faites sur deux droites qui le lient au 2e point, et à un 3e), est égale à la somme des projections correspondantes relatives à ces deux derniers points, faites, respectivement, sur les mêmes droites ; il n'en est pas de même lorsque les actions réciproques de deux points, s'exercent par l'intermède de pièces à *articulations* ou à *contacts ;* dans ce cas, non seulement les variations ou projections $d\rho$, relatives à l'un et à l'autre point, peuvent avoir entr'elles des rapports quelconques, mais encore ces projections ne doivent pas être prises sur la droite qui réunit les points dont il s'agit, vu que la direction, suivant laquelle l'action de l'un s'exerce, se transmet à l'autre suivant une direction différente. Cependant, si on considère que ces actions réciproques font supporter des efforts aux points d'*articulations* ou de *contacts* tels que les actions étant données, les efforts s'en déduisent, et réciproquement, on reconnaîtra que cette partie du système général, est un système particulier de l'espèce de ceux dont il a été question art. 497, sur lequel les forces Π, prises dans les sens convenables, doivent se faire équilibre, ce qui lui rend applicable la démonstration donnée à l'art. cité, pour le cas général où ce système particulier serait un moyen de transmission d'action

entre un nombre quelconque de points. Or on a vu, au même article, que la somme des moments des forces qui équivaudraient, quant à l'effet, aux efforts supportés par les points de contact, et celle des moments des forces qui sont ici représentées par Π sont, chacune en particulier égale à zéro; ce 3e cas de la liaison des points du système ne fournit, comme les deux premiers, à la somme $\Sigma\,(\Pi d\rho)$ que des quantités qui se détruisent réciproquement.

506. On a donc, généralement, d'après ce qui est dit dans les deux art. précédents, $\Sigma\,(\Pi d\rho)=0$, d'où on conclut $\Sigma\,(Pdr)=0$, et par suite, art. 503, $\Sigma\,\{P(dq+dr)\}=0$: la somme des variations partielles dq et dr est, art. cité, égale à la variation totale dp, donc l'équation

$$\Sigma\,(Pdp)=0$$

est satisfaite dans le cas de l'équilibre des forces appliquées à un système quelconque.

507. Voici une autre marche de raisonnement pour arriver au même résultat, en s'appuyant sur la théorie démontrée art. 497, 498 et 499.

Laissant de côté la partie dq de la variation de dp, sur laquelle je ne pourrais que répéter ce qui est dit précédemment, pour m'occuper uniquement de la variation partielle dr, j'observe que si, dans un système quelconque sollicité par des forces en équilibre, le déplacement d'un des points, par rapport aux autres, n'entraîne pas les déplacements de ceux-ci, le point déplacé pourra, d'après les conditions du système, avoir un mouvement, ou absolument indépendant, ou lié seulement aux mouvements d'une partie des autres points de ce système; ces dernières circonstances ont lieu lorsque le nombre des variables desquelles dépendent les positions des points d'application des forces, excède de plus d'une unité le nombre des équations qui établissent la constitution du système.

Considérant donc isolément un des systèmes partiels de points dont les mouvements sont liés à celui de l'un d'entr'eux, et qui peuvent changer leurs positions respectives sans qu'aucun des autres points du système total se déplace, j'observe que la démonstration de l'art. 497 est spécialement applicable à ce système partiel sollicité par des forces entre lesquelles il doit exister un équilibre indépendant de l'équilibre général, puisque les forces et les résistances des autres parties du système ne pourraient pas empêcher les déplacements des points de ce même système partiel si son équilibre n'avait pas lieu.

Passant à un autre point du système total, non-compris parmi ceux dont je viens de parler, je considère le second système partiel composé de ce point et de ceux dont les mouvements dépendent des siens, comme uni au premier système partiel de manière que les mouvements de l'un et de l'autre soient liés par de nouvelles conditions compatibles avec celles auxquelles ils étaient déjà assujettis chacun en particulier; il y a, en général, une infinité de modes de liaisons qui peuvent remplir cet objet et qu'on imaginerait aisément dans les cas où on aurait à les employer.

Ainsi voilà deux systèmes partiels, parmi ceux qui composent le système total, qui d'indépendants qu'ils étaient, quant aux changements de forme, sont liés de manière qu'on peut appliquer, dans le cas de l'équilibre, à l'ensemble des points qui les composent et des forces appliquées à ces points, la démonstration de l'art. 497; mais ce que je viens de faire pour les points et les forces de ces deux systèmes partiels, peut évidemment s'étendre à tous les points et à toutes les forces du système total, d'où je conclus que la somme des moments (art. 457) des forces appliquées à un système quelconque peut toujours, dans le cas de l'équilibre de ce système, être rendue nulle, en réunissant aux conditions déjà existantes d'autres conditions avec lesquelles les premières sont compatibles.

Il s'agit ici des moments $P\,dr$ dûs au changement de forme, et réunissant l'équation $\Sigma(P\,dr)=0$ avec l'équation $\Sigma(P\,dq)=0$ relative au mouvement général du système et démontrée art. 468 et suivants, on a comme à l'article précédent $\Sigma(P\,dp)=0$.

508. Les équations de condition données par la nature du système que j'appelle *équations du système*, et celles qu'on peut leur ajouter, d'après ce qui est dit dans l'article précédent, que je désigne par le nom *d'équations auxiliaires*, liant tous les points de ce système de manière que le mouvement de l'un d'entr'eux détermine le déplacement de chacun des autres, le nombre total de ces équations doit, art. 499, être moindre d'une unité que le nombre des indéterminées desquelles dépendent les positions des points d'applications des forces. Si après avoir, dans l'équation générale $\Sigma(P\,dp)=0$, exprimé les incréments dp en fonctions de ces indéterminées et de leurs variations, on divise tous les termes de l'équation par l'une de ces variations, on y aura un nombre de rapports

rapports de la forme $\frac{d\lambda}{d\mu}$ égal au nombre total tant des *équations du système* que des *équations auxiliaires*, et on pourrait (dans l'hypothèse où les *équations auxiliaires* dont il suffit, comme on le verra ci-après, de concevoir la possibilité, seraient réellement posées et employées) par le moyen des différentielles premières de ces diverses équations, éliminer tous les rapports $\frac{d\lambda}{d\mu}$ de l'équation générale donnée par le principe des vitesses virtuelles qui ne contiendrait plus que les puissances et les indéterminées du système sans variations.

Ainsi $R=0$, $S=0$, etc. étant les *équations du système*, $\rho=0$, $\sigma=0$, etc. les *équations auxiliaires*, et $\Theta=0$ l'équation à laquelle on parviendrait en éliminant, par le moyen des équations $dR=0$, etc. $d\rho=0$, etc. les rapports $\frac{d\lambda}{d\mu}$ de l'équation $\Sigma(Pdp)=0$, mise sous la forme convenable, on aurait, après l'élimination, un nombre d'équations finies $R=0$, etc. $\rho=0$, etc. $\Theta=0$, égal à celui des variables relatives aux positions des points d'applications des forces, équations toutes compatibles avec la constitution du système et les conditions de son équilibre qui aurait nécessairement lieu lorsque l'équation $\Theta=0$ serait satisfaite.

509. Telle pourrait être la marche du calcul pour arriver aux déterminations ultérieures des relations entre les puissances et les indéterminées desquelles dépendent les positions des points du système dans le cas de l'équilibre, si on employait réellement les *équations auxiliaires*; mais ces équations hypothétiques ne doivent jamais être d'aucun usage, lorsqu'on a à faire des applications du principe général, il en a été question, une fois pour toutes, dans la démonstration précédente, parce qu'elles étaient nécessaires à la marche du raisonnement, et l'objet qu'on s'est proposé, en les y introduisant, est complètement rempli dès que l'on conçoit seulement leur possibilité.

La preuve de cette proposition est une affaire de pure analyse; on démontre d'abord que le procédé d'élimination donné, dans l'art. précédent, conduit rigoureusement au même résultat qu'on obtiendrait en suivant la méthode de l'art. 483; or m étant, comme à l'art. cité, le nombre des *équations du système*, n le nombre des variables des-

quelles dépendent les positions de ses points, et, par conséquent, $n-m-1$ le nombre des *équations auxiliaires*, on arrive, en employant toutes ces équations, tant données qu'hypothétiques, par les règles que prescrit la méthode de l'art. 483, à une équation unique délivrée des indéterminées K, équation que j'ai désignée par $\Theta=0$, au lieu que si on eût employé seulement les *m équations du système* on serait parvenu à un nombre $n-m$ d'équations, que j'ai représentées par $\varpi=0$; mais on démontre encore que l'équation $\Theta=0$ ne peut être satisfaite a moins que les $n-m$ équations $\varpi=0$, n'aient lieu séparément.

Enfin on s'assure de la vérité de la proposition inverse et on prouve que lorsque les équations $\varpi=0$ ont lieu l'équation $\Theta=0$ est nécessairement satisfaite, d'où on déduit aisément cette conséquence, que l'emploi pur et simple de la méthode de l'art. 483, avec les seules équations de condition, ou *équations du système*, données par l'état de la question, suffit généralement pour déterminer toutes les relations sur lesquelles l'équilibre d'un système quelconque est établi.

Je supprime, pour abréger les démonstrations de ces théorêmes que les élèves trouveront dans un mémoire fort intéressant de M. Ampère (*Journal de l'école Polytechnique* 13e *cahier*) qui contient une démonstration du principe des *vîtesses virtuelles* dégagée de la considération des *infiniment petits*.

Ils trouveront aussi, relativement à ce principe, des études très-utiles à faire dans l'ouvrage de M. le Comte *Fossombroni* que j'ai cité art. 86,

510. J'ai eu spécialement en vue les *corps solides*, dans toute la théorie relative au principe des vitesses virtuelles, démontrée depuis l'art. 454; cependant les résultats généraux auxquels je suis parvenu, conviennent indistinctement aux *corps solides* et aux *corps fluides*; c'est ce que je ferai voir dans la troisième partie du cours, avec toutes les explications nécessaires relatives, tant aux fluides *incompressibles*, qu'aux fluides *élastiques*. On y verra comment, pour cette dernière espèce de corps, il faut entendre ce qui est dit art. 461 etc. etc.

Propriétés générales de l'équilibre, déduites du principe des vitesses virtuelles.

511. En considérant le principe des vîtesses virtuelles comme un théorême dont la vérité est censée reconnue, ou en le démontrant par

des raisonnements indépendants des propositions contenues dans les 2e et 3e sections de ce traité, on en déduit, avec beaucoup de brièveté et de facilité, les conditions de l'équilibre des systèmes *étendus* et *figurés*, constitués d'une manière quelconque, la théorie des *centres des forces*, des *centres de gravité*, etc. Cette marche, suivie avec le plus grand succès par les célèbres auteurs de la *Mécanique analytique* et de la *Mécanique céleste*, ne convenait pas à un traité élémentaire où il faut rattacher immédiatement aux premières notions, tout ce qui peut s'en déduire sans de grandes difficultés, mais je vais prouver, par quelques exemples, la grande utilité du principe des vitesses virtuelles pour arriver immédiatement, et presque sans calcul, à des vérités curieuses et importantes ; ces exemples sont tirés de la section troisième de la première partie de la *Mécanique analytique*.

512. Je me propose de considérer les *maxima* et *minima* qui peuvent avoir lieu dans l'équilibre, et pour cela je reprends la formule générale

$$P' dp' + P'' dp'' + P''' dp''' + \text{etc.} = 0$$

d'équilibre entre les forces P', P'', etc. dirigées suivant les lignes p', p'', etc. art. 455.

On peut supposer que ces forces soient exprimées de manière que la quantité $P' dp' + P'' dp'' +$ etc. soit une différentielle exacte d'une fonction de p', p'', etc. représentée par Φ, en sorte que l'on ait

$$d\Phi = P' dp' + P'' dp'' + \text{etc.}$$

alors on aura, pour l'équilibre, cette équation $d\Phi = 0$, laquelle fait voir que le système doit être disposé de manière que la fonction Φ soit, généralement parlant, un *maximum* ou un *minimum*.

Je dis *généralement parlant*, car on sait que l'égalité d'une différentielle à zéro, n'indique pas toujours un *maximum* ou un *minimum* comme on le voit par la théorie des courbes.

513. La supposition, a lieu, en général, lorsque les forces P', P'', etc. tendent réellement ou à des points fixes ou à des corps du même système, et sont proportionelles à des fonctions quelconques des distances, ce qui est proprement le cas de la nature.

Ainsi, dans cette hypothèse de forces, le système sera en équilibre lorsque la fonction Φ sera un *maximum* ou un *minimum* ; c'est en

quoi consiste le principe que *Maupertuis* avait proposé sous le nom de *Loi du repos*.

514. Si on considère un système de corps pesants en équilibre, les forces P', P'', etc. provenant de la gravité seront, art. 265, proportionelles aux masses des corps, pourront être représentées par ces masses elles-mêmes et considérées comme des constantes dans l'expression $P'dp' + P''dp'' +$ etc. on aura donc

$$\Phi = P'p' + P''p'' + \text{etc.}$$

P', P'', etc. désignant les masses des différents corps du système. Si on prend les origines de p', p'' etc. au centre de la terre qui est leur point commun d'intersection, ces lignes seront les distances, à ce centre, des centres de gravité particuliers de chacun des corps P', P'', etc. et comme elles peuvent être, art. 264, censées parallèles, la quantité $\frac{\Phi}{P' + P'' + \text{etc.}}$ exprimera art. 273 et 283 la distance du centre de gravité de tout le système au centre de la terre, laquelle deviendra un *minimum* ou un *maximum* lorsque le système sera en équilibre. Le *minimum* aura lieu, par exemple, dans le cas de la chaînette, et le *maximum* dans le cas de plusieurs globules qui se soutiendraient en forme de voûte. Ce principe est connu depuis long-temps.

En partant du théorème que je viens de démontrer on trouverait l'équation de la *chaînette* et toutes ses propriétés, telles qu'elles ont été données art. 429 et suivants; on considèrerait, pour plus de commodité, les lignes p', p'', etc. comme les distances des centres de gravité des corps P', P'', etc. à un plan horizontal de position déterminée.

515. Après s'être assuré que la fonction Φ est un minimum ou un maximum lorsque la position du système est celle de l'équilibre, on démontre que si cette fonction est un *minimum* l'équilibre aura de la *stabilité*, ensorte que le système étant d'abord supposé dans l'état d'équilibre et venant, ensuite, à être tant soit peu déplacé de cet état, il tendra de lui-même à s'y remettre en faisant des oscillations infiniment petites; qu'au contraire dans le cas où la même fonction serait un *maximum*, l'équilibre n'aura pas de stabilité et qu'étant une fois troublé, le système pourra faire des oscillations qui ne seront pas très-petites, et qui pourront l'écarter de plus en plus de son premier état.

Voyez, la démonstration de ces propositions, que je supprime pour

abréger, dans la *Mécanique analytique*, première partie, section 3 art. 17 et suivants. En général, un système pesant est dans un état d'équilibre *stable*, lorsqu'un petit dérangement de cet état d'équilibre élève son centre de gravité, et l'équilibre n'a pas de *stabilité*, lorsque le centre de gravité s'abaisse en vertu d'un pareil dérangement. L'emploi du *pendule*, pour mesurer le temps, et pour d'autres usages, est fondé sur la *stabilité* de l'équilibre d'un corps pesant suspendu à un axe horizontal et ayant, dans cet état d'équilibre, son centre de gravité au-dessous de cet axe ; on peut alors, en lui donnant une impulsion et l'abandonnant ensuite à lui-même, lui faire faire des oscillations de part et d'autre de la position d'équilibre, qui, une fois établies, dureraient continuellement, sans les *frottements*, les *résistances des milieux*, etc., et dont, eu égard à ces résistances, on ne peut prolonger la durée que par un renouvellement de force motrice ; si on place le centre de gravité du même pendule au-dessus de l'axe de suspension, et dans le plan vertical qui renferme cet axe, l'équilibre aura lieu, mais le corps, par la plus petite impulsion sortira de cet état d'équilibre, et s'en éloignera continuellement ; les questions relatives à ces mouvements seront traitées dans la 2e partie du cours, avec les détails convenables.

516. Voici, par anticipation, un exemple de l'application du principe des vîtesses virtuelles aux questions de mouvement. Si le pendule, ou corps solide suspendu à un axe horizontal, dont j'ai parlé dans l'art. précédent, est mis dans la position supérieure, ou d'équilibre *non stable*, et qu'on lui donne une impulsion quelconque, qui ne soit pas dirigée dans le plan vertical renfermant l'axe de suspension, il tournera toujours dans le même sens, autour de cet axe de suspension (en supposant nulles les résistances dues au *frottements*, aux *milieux* dans lesquels le mouvement s'opère etc.). Soient à un instant quelconque du mouvement, $d\varepsilon_{,}$, $d\varepsilon_{,,}$, etc. les arcs élémentaires respectifs, parcourus par les molécules $m_{,}$, $m_{,,}$, etc. du corps, pendant un temps infiniment petit que je désigne par dt, la somme $m_{,}\left(\frac{d\varepsilon_{,}}{dt}\right)^2 + m_{,,}\left(\frac{d\varepsilon_{,,}}{dt}\right)^2 +$ etc. qu'on appelle la somme des *forces vives*, sera un maximum dans la position inférieure, celle de l'équilibre *stable*, et un minimum dans la position supérieure, celle de l'équilibre *non stable*.

La démonstration de ce beau théorème, applicable à des cas de com-

position de système et d'action de forces beaucoup plus généraux que le précédent se déduit immédiatement du principe des vitesses virtuelles, en admettant, comme vraie, l'équation suivante que je démontrerai dans la 2e partie du cours.

$$m_{,}\left(\frac{d\varepsilon_{,}}{dt}\right)^{2}+m_{,,}\left(\frac{d\varepsilon_{,,}}{dt}\right)^{2}+\text{etc.}=\textit{constante}-2\,\Phi$$

D'après cette équation lorsque le système passe par les positions d'équilibre où on a $d\Phi=0$, on a aussi $d\left\{m_{,}\left(\frac{d\varepsilon_{,}}{dt}\right)^{2}+\text{etc.}\right\}=0$ et par conséquent $m_{,}\left(\frac{d\varepsilon_{,}}{dt}\right)^{2}+\text{etc.}$ égal à un *maximum* ou à un *minimum*; et s'il s'agit du cas particulier du pendule, le maximum a lieu évidemment dans la position inférieure. Ces résultats donnent le principe de statique proposé par M. DE COURTIVRON « que de toutes les « situations que prend successivement un système, celle où il a la plus « grande ou la plus petite *force vive*, est la même que celle où il faudrait le placer en premier lieu pour qu'il restat en équilibre. »

FIN DE LA TROISIÈME SECTION.

SECTION IV.

DE L'ÉQUILIBRE DES MACHINES EN FAISANT ENTRER EN CONSIDÉRATION LES RÉSISTANCES DUES A L'*ADHÉSION*, AU *FROTTEMENT*, A LA *ROIDEUR* DES *CORDES* ET DES *CHAINES*.

Observations générales; division des matières contenues dans cette quatrième section.

517. J'AI donné, art. 484 et suivants, des notions générales sur l'espèce de système à laquelle se rapportent en général, les *machines*, et j'ai démontré le principe d'où on déduit les conditions communes de leur équilibre applicables sans exception, à un *mécanisme* quelconque. Une conséquence immédiate de la théorie dont j'ai posé les bases à l'article cité est que, parmi les conditions auxquelles la construction d'une machine doit satisfaire, la première tient à la solution du problème suivant.

« Étant donnés deux points dans l'espace, lier ces deux points par « un système de forme variable ou invariable, dont la composition soit « telle qu'en imprimant, à un de ces points, un mouvement donné il « en résulte, pour l'autre point, un mouvement pareillement donné. »

Ce problème, qui est, en général, indéterminé, renferme complètement, tout ce qu'on pourrait appeler la *théorie des mécanismes*, théorie purement géométrique, et qui peut être tout-à-fait séparée de la considération des *forces* ou *puissances*; elle n'en est pas moins très-propre à exercer le génie d'invention; quelques hommes dont les noms sont cités avec éloge, dans l'histoire des arts, lui doivent une partie de leur réputation.

518. Cette *théorie des mécanismes* quoique susceptible d'être réduite en corps méthodique de science, n'avait jamais, que je sache, été considérée sous ce point de vue jusqu'en 1790, époque à laquelle je donnai dans le 1er volume de mon *Architecture hydraulique*, un classement systématique des machines à élever l'eau que je me propose de suivre dans la partie de l'ouvrage où je traiterai de ce genre de machines.

519. Depuis ce temps MM. Bettancourt, Lanz et Hachette profitant et de leurs propres recherches et des grands progrès que M. Monge a fait faire à la Géométrie descriptive, ont publié d'interessants traités sur cette matière. Nous devons à MM. de Betancourt et Lanz un *essai sur la composition des machines*, imprimé en 1808, dont le plan, aussi neuf qu'ingénieux, est de leur invention. Cet ouvrage a été revu et publié avec addition de l'analyse d'un *cours de machines*, par M. Hachette, qui a fait dessiner les planches à l'école Polytechnique, et qui met au jour, en ce moment, la première partie d'un *traité élémentaire des machines*, de sa composition.

520. Les classements de mouvements, faits par les auteurs dont je viens de parler, réduisent à dix les cas du problême general énoncé art. 517, pour ce qui concerne les machines *élémentaires*, dans lesquelles il n'entre que les combinaisons du mouvement *rectiligne* et du mouvement *circulaire*. Chacun des points auxquels le *moteur* et la *résistance* (voyez l'acception de ce mot art. 491) sont appliqués, peut avoir l'un des quatre mouvements suivants, savoir:

Le mouvement rectiligne *continu*, celui a lieu toujours dans le même sens.

Le mouvement rectiligne *alternatif*, celui qui fait parcourir, alternativement, une même ligne droite au point mobile, dans des sens différens, qu'on appelle aussi mouvement de *va et vient*,

Le mouvement circulaire *continu*.

Le mouvement circulaire *alternatif*.

Ces quatre mouvements peuvent se combiner, d'abord, de six manières, lorsqu'on veut imprimer l'un d'entr'eux au point d'application du moteur et l'un des trois autres au point d'application de la resistance.

Il y a de plus quatre combinaisons répondants aux cas où les points d'application du moteur et de la resistance ont un mode commun de mouvement.

521.

521. Voici un tableau de ces dix combinaisons de mouvement, donnant les dix cas du problème général de l'art. 517, pour ce qui concerne les machines élémentaires ; l'expression *point extrême* signifie comme à l'art. 486, indistinctement, le point d'application du *moteur* ou celui de la *résistance*.

CAS.	MOUVEMENT D'UN DES POINTS EXTRÊMES DE LA MACHINE.	MOUVEMENT DE L'AUTRE POINT EXTRÊME DE LA MACHINE.
1er	Rectiligne continn.	Rectiligne continu.
2	Rectiligne continu.	Rectiligne alternatif.
3	Rectiligne continn.	Circulaire continu.
4	Rectiligne continu	Circulaire alternatif.
5	Circulaire continu.	Rectiligne alternatif.
6	Circulaire continu.	Circulaire continu.
7	Circulaire continu.	Circulaire alternatif.
8	Rectiligue alternatif	Rectiligne alternatif.
9	Rectiligne alternatif.	Circulaire alternatif.
10	Rectiligne alternatif.	Circulaire alternatif.

Je me bornerai à ces premières notions sur la partie purement géométrique de la théorie des machines, en renvoyant, pour de plus grands détails, aux ouvrages ci-dessus cités.

522. A cette partie géométrique se réunit, pour compléter la science des *machines*, celles qu'on peut appeller *statique* et *dynamique*, dans lesquelles entre la considération des forces extérieures qui leur sont appliquées, et des actions et réactions de leurs diverses parties les unes sur les autres. Les conditions principales auxquelles les machines doivent satisfaire, sous ces derniers points de vue, sont, 1° que le produit de l'effort du *moteur*, par l'espace que parcourt son point d'application, dans un temps donné, excède le moins qu'il est possible le produit de l'effort de la résistance par l'espace que parcourt son point d'application pendant le même temps. On ne regarde pas comme une bonne machine, celle dans laquelle le rapport entre le second produit et le premier, n'est pas de $\frac{1}{2}$ à $\frac{2}{3}$; 2°, que le *mécanisme* par lequel l'action du *moteur* est transmise à la *résistance* ait, parmi toutes les formes qui résolvent le problème indéterminé de l'art. 517, celle qui

est la plus compatible avec la solidité et la durée des diverses parties du mécanisme, l'économie de la construction et des réparations, la facilité du jeu et de la manœuvre, etc.

523. On voit par ce court exposé combien sont abondantes les matières d'un traité spécial et complet sur les machines. Le plan d'un pareil traité est trop vaste relativement à l'étendue qu'on peut donner à un cours élémentaire où il ne s'agit que de préparer les élèves aux études qu'ils doivent faire dans les écoles d'application pour se mettre en état d'apprécier l'effet, le produit, et les diverses qualités qui font qu'une machine donnée, envisagée quant à sa construction et aux forces qui agissent sur elle, est plus ou moins propre à remplir sa destination.

Je me bornerai en conséquence à résoudre quelques questions fondamentales sur l'équilibre et le mouvement des machines, choisies de manière que leurs solutions rendent faciles celles des cas les plus composés, et contiennent des règles pour déterminer, par des calculs fondés sur l'expérience, les *résistances* particulières dues à certaines circonstances physiques qui influent très-sensiblement sur le produit des machines, et auxquelles il est indispensable d'avoir égard dans la pratique.

524. *L'effet utile* des machines résulte en général, du mouvement que le moteur imprime au point d'application de la *résistance*, il en est cependant quelques unes dont la destination unique est de donner le moyen de contre-balancer les forces qui tendent à faire mouvoir ce point, et, en général, il faut, pour se mettre en état d'évaluer *l'effet utile*, considérer d'abord le *moteur* et la *résistance* dans l'état d'équilibre, ce qui constitue la partie *statique* de la théorie des machines; c'est celle dont je vais m'occuper, et je ne parlerai des machines en mouvement qu'à la fin de la 2e partie du cours.

525. Il semblerait au premier coup d'œil que les formules d'équilibre des machines *élémentaires* devraient être assujetties à un classement analogue à celui de ces machines elles-mêmes, que j'ai présenté art. 520 et 521; mais en observant que ces diverses machines comportent seulement des mouvements rectilignes et circulaires, on reconnaît que les conditions de leur équilibre ne sont que des combinaisons de celles qui ont lieu sur le *plan incliné* et le *levier*. La théorie de ces deux *machines simples* serait donc, à la rigueur, suffisante pour l'objet que j'ai en vue, mais j'y joindrai, afin de la rendre plus instructive, quelques

détails sur le *coin*, sur les systèmes de *poulies*, sur l'équilibre de la *vis*, celui du *treuil* et sur les systèmes *d'engrenage*.

Je commencerai par établir les conditions de l'équilibre des machines en faisant abstraction des résistances dues au *frottement* etc.; et j'introduirai ensuite, à l'aide de l'expérience, ces résistances dans le calcul.

Définition du plan incliné; conditions de l'équilibre et déterminations diverses relatives au plan incliné simple, et à un système de deux plans inclinés adossés; démonstration remarquable de STEVIN.

526. Soit AC une horizontale, AB une verticale, et BC l'intersection du plan BAC et d'un plan qui lui est perpendiculaire; ce dernier plan prend le nom de *plan incliné*, lorsqu'il est employé comme moyen mécanique. Il serait aisé de concevoir comment le *plan incliné* peut sous ce point de vue, être d'une très-grande utilité, si on n'avait pas à chaque instant, l'occasion de s'en assurer par le fait; supposons, par exemple, qu'on ait à élever, à une hauteur verticale AB, un poids P à l'aide d'un moteur M, tel que le plus grand effort dont ce moteur soit capable équivale à un poids moindre que P, l'action verticale de M sur P ne pourra jamais produire l'effet demandé; mais si P est posé sur le *plan incliné* BC et qu'on ait $P \times \cos. ABC < M$, alors M en agissant sur P parallèlement à CB pourra le faire mouvoir le long de cette ligne CB jusqu'à ce qu'il soit arrivé de C en B et élevé, par conséquent, à la hauteur AB au-dessus de l'horizontale AC. Je fais abstraction de l'*adhésion* et du *frottement*. Fig. 17

L'horizontale AC est ce qu'on appelle la *base* du *plan incliné*, la verticale AB est sa *hauteur*, et BC est sa *longueur*.

527. On a souvent occasion, en mécanique, de traiter les questions d'équilibre ou de mouvement des corps qui, posés sur différents plans ou différentes surfaces, agissent les uns sur les autres par l'intermède de cordes, chaînes, ou autres moyens de transmission de mouvement. Le cas le plus simple de ces actions réciproques est celui de deux corps ou points matériels m' et m, posés sur deux plans inclinés adossés DB et BC, dont AB est la hauteur commune, AD et AC les deux bases dirigées suivant une même ligne horizontale. Fig. 18

m' et m, soumis à la pesanteur ou à d'autres forces quelconques, sont liés l'un à l'autre par une corde gpk parfaitement flexible et inex-

tensible, passant sur une poulie p, et dont les portions gp et pk, parallèles à DB et BC, sont supposées attachées aux centres de gravité de m' et $m_{,}$.

528. La théorie de l'équilibre sur le *plan incliné* tant simple que double, se déduit avec la plus grande facilité de la théorie générale de l'équilibre d'un corps posé sur une courbe ou sur une surface courbe que j'ai donnée art. 90 et suivants. Il résulte de cette théorie que les conditions de l'équilibre de deux forces appliquées à un même point matériel, qui est assujetti à se mouvoir sur un plan fixe, sont 1° que les deux forces ayent leurs directions dans un même plan perpendiculaire au plan sur lequel le point matériel est posé, 2° que les produits de ces forces par les cosinus de leurs angles d'inclinaison sur ce dernier plan soient égaux et de signes contraires.

La pression normale sur le même plan sera égale à la somme des produits des forces par les sinus de ces angles.

529. Tous les théorêmes relatifs à l'équilibre du plan incliné sont des conséquences si faciles à tirer des propositions précédentes, que je n'ai besoin que du simple énoncé de ces théorèmes pour les élèves qui possèdent les trois premières sections de la statique.

Soient dans le cas de l'art. 526, et de la figure 17.

Le corps ou point matériel posé sur le plan incliné . . . . $m_{,}$

La force qui tend à pousser le corps $m_{,}$ du côté { du sommet. . . . $P_{,}$ / de la base. . . . . $P_{,,}$

Pression normale sur le plan incliné. . . . . $N_{,}$

L'angle formé par la longueur du plan incliné et par la direction de . . . . { $P_{,}$ . . . . $\varepsilon_{,}$ / $P_{,,}$ . . . . $\varepsilon_{,,}$

L'angle formé par la base du plan incliné et par la direction de . . . . { $P_{,}$ . . . . $\alpha_{,}$ / $P_{,,}$ . . . . $\alpha_{,,}$

Angle formé par la longueur du plan incliné et par sa base . . . $\theta_{,}$

Angle formé par les directions des puissances $P_{,}$ et $P_{,,}$ . . . . . τ

Hauteur du plan incliné . . . . h

Base du plan incliné . . . . $b_{,}$

Longueur du plan incliné . . . . $k_{,}$

on a dans le cas de l'équilibre les équations suivantes

équations d'équilibre $\left\{\begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots P_{,}\cos.\varepsilon_{,} = P_{,,}\cos.\varepsilon_{,,} \\ \text{ou}\ldots P_{,}\cos.(\theta_{,}-\alpha_{,}) = P_{,,}\cos.(\alpha_{,,}-\theta_{,}) \end{array}\right.$

Pression normale. $\left\{\begin{array}{l} N_{,}=P_{,}\sin.\varepsilon_{,}+P_{,,}\sin.\varepsilon_{,,}=\dfrac{\sin.(\varepsilon_{,}+\varepsilon_{,,})}{\cos.\varepsilon_{,}}P_{,,} \\ N_{,}=\dfrac{\sin.\tau}{\cos.\varepsilon_{,}}P_{,,}=\dfrac{\sin.(\alpha_{,,}-\alpha_{,})}{\cos.(\theta_{,}-\alpha_{,})}P_{,,} \end{array}\right.$

Pression que supporte la base.
$= P_{,,}\sin.\alpha_{,,} - P_{,}\sin.\alpha_{,}$

force qui tend à faire glisser le plan incliné sur sa base
$= P_{,}\cos.\alpha_{,} - P_{,,}\cos.\alpha_{,,}$

$\left.\begin{array}{l} \theta_{,}=\alpha_{,}+\varepsilon_{,}=\alpha_{,,}-\varepsilon_{,,} \\ \varepsilon_{,}=\theta_{,}-\alpha_{,} \\ \varepsilon_{,,}=\alpha_{,,}-\theta_{,} \\ \varepsilon_{,}+\varepsilon_{,,}=\alpha_{,,}-\alpha_{,} \end{array}\right.$

530. Dans le cas de la pesanteur, $P_{,,}$ étant le poids du corps $m_{,}$ et la base, qui relativement aux formules de l'article précédent, peut avoir une position quelconque, étant horisontale, on a

$P_{,}$ est une puissance horizontale $\left\{\begin{array}{l} P_{,}\cos.\theta_{,}=P_{,,}\sin.\theta_{,}\ ;\ N_{,}=\dfrac{P''}{\cos.\theta_{,}} \\ P_{,}:P_{,,}::h:b_{,}\ ;\ N_{,}:P_{,,}::k_{,}:b_{,} \end{array}\right.$

La direction de $P_{,}$ est parallèle à la longuer du plan incliné $\left\{\begin{array}{l} P_{,}=P_{,,}\sin.\theta_{,}\ ;\ N_{,}=P_{,,}\cos.\theta_{,} \\ P_{,}:P_{,,}::h:k_{,}\ ;\ N_{,}:P_{,,}::b_{,}:k_{,} \end{array}\right.$

531. Prenant ensuite le cas des plans inclinés adossés, celui de l'art. 527 et de la figure 18, supposant nulles les forces étrangères à l'action réciproque des deux corps $m_{,}$ et m', qui tendent à pousser ces corps vers le sommet commun des plans inclinés, et représentant les quantités qui appartiennent au plan incliné $BC_{,}$ par les signes convenus art. 529, et les quantités correspondantes, qui appartiennent au plan incliné BD, par les mêmes lettres, qui porteront l'accent supérieur au lieu de l'accent inférieur, on a

$$P_{,,}\cos.\varepsilon_{,,} = P''\cos.\varepsilon''$$
$$N_{,}=P_{,,}\sin.\varepsilon_{,,}\ ;\ N'=P''\sin.\varepsilon''$$

Pression que supportent les bases $= P_{,,}\sin.\alpha_{,,} + P''\sin.\alpha''$

Forces qui tend à faire glisser les plans inclinés sur leurs bases $\Big\} = P_{,,}\cos.\alpha_{,,} - P''\cos.\alpha''$

532. Le cas de la pesanteur donne, en représentant les poids de $m_{,}$ et m' par leurs masses

$$m_{,} \sin. \theta_{,} = m' \sin. \theta'$$
$$m_{,} : m' :: k_{,} : k'$$

533. On voit, par la dernière proportion, que les poids $m_{,}$ et m', en équilibre sur les deux plans inclinés adossés, sont entr'eux comme les longueurs de ces plans inclinés. *Stevin*, célèbre mathématicien Hollandais, et intendant des digues de Hollande, qui a vécu à la fin du 16ᵉ et au commencement du 17ᵉ siècle, a donné une démonstration de ce théorème, à une époque où la théorie du plan incliné n'était pas encore éclaircie, remarquable tant en elle-même que par les conséquences qu'il en a tirées. Voici cette démonstration telle qu'elle est présentée dans la *Mécanique analitique.*

« Stevin considère un triangle solide posé sur sa base horizontale, « en sorte que ses deux côtés forment deux plans inclinés, et il imagine « qu'un chapelet formé de plusieurs poids, enfilés à des distances égales, « ou plutôt une chaîne d'égale grosseur soit placée sur les deux côtés de « ce triangle, de manière que toute la partie supérieure se trouve ap- « pliquée aux deux côtés du triangle et que la partie inférieure pende « librement, au-dessous de la base, comme si elle était attachée aux « deux extrémités de cette base.

« Or Stevin remarque qu'en supposant même que la chaîne puisse « glisser librement sur le triangle, elle doit cependant demeurer en « repos; car si elle commençait à glisser d'elle-même dans un sens elle « devrait continuer à glisser toujours, puisque la même cause de mou- « vement subsisterait, la chaîne se trouvant à cause de l'uniformité de « ses parties, placée toujours de la même manière sur le triangle, d'où « résulterait un mouvement perpétuel ce qui est absurde.

« Il y a donc nécessairement un équilibre entre toutes les parties de « chaîne; or il est évident que la portion qui pend au-dessous de la « base est déjà en équilibre d'elle-même; donc il faut que l'effet de « tous les poids appuyés sur l'un des côtés contre-balance l'effort des « poids appuyés sur l'autre côté; mais la somme des uns est à la « somme des autres, dans le même rapport que les longueurs des côtés « sur lesquels ils sont appuyés. Donc il faudra toujours la même puis- « sance pour soutenir un ou plusieurs poids placés sur un plan incliné, « lorsque le poids total sera proportionel à la longueur du plan, en « supposant la hauteur la même, mais quand le plan est vertical, la

« puissance est égale au poids ; donc, dans tout plan incliné, la puis-
« sance est au poids comme la hauteur du plan est à sa longueur . .

. . . .

« Stevin déduit de cette théorie celle de l'équilibre entre trois puis-
« sances qui agissent sur un même point, et il fait voir que cet équilibre
« a lieu lorsque les puissances sont parallèles et proportionnelles aux
« trois côtés d'un triangle rectiligne quelconque. »

Principe des vitesses virtuelles considéré particulièrement dans l'équilibre du plan incliné ; formules de cet équilibre déduites de la propriété du *maximum* d'abbaissement du centre de gravité ; problème relatif à l'équilibre des corps placés sur des courbes, dont cette propriété donne une solution fort simple.

534. J'ai dit, art. 484, que le principe des vitesses virtuelles avait été, dès long-temps, apperçu dans l'équilibre des machines, et il sera bon de faire voir par quelques exemples particuliers comment il s'y trouve vérifié ; ces rapprochements, quoique leurs résultats soient assurés d'avance par les démonstrations générales données depuis l'art. cité jusqu'à l'art. 510, n'en sont pas moins intéressants et pour la curiosité et pour l'instruction.

Je ne pourrais, dans le cas du plan incliné simple, que répéter littéralement ce qui est dit art. 466, en conséquence je passerai au cas de l'équilibre de deux corps posés sur deux plans inclinés adossés qui ont comme le précédent, la propriété de vérifier l'équation déduite du principe des vitesses virtuelles lorsqu'on donne aux incréments dp des valeurs finies.

Supposons que le corps m', se mouvant le long du plan incliné sur lequel il est assujetti à rester, passe de sa position à la position E', en parcourant un espace fini $\Delta\rho$, d'après les conditions du système le corps $m_{,}$ devra prendre une position $E_{,}$ à la même distance $\Delta\rho$ de sa position initiale. Or les puissances P'' et $P_{,,}$ qui sollicitent respectivement m' et $m_{,}$ faisant avec les lignes égales parcourues, les angles ε'' et $\varepsilon_{,,}$, les projections de $\Delta\rho$ sur les directions de ces puissances, désignées par $\Delta p''$ et $\Delta p_{,,}$ auront pour valeurs

$$\Delta p'' = \Delta\rho \text{ cosin. } \varepsilon'' ; \; \Delta p_{,,} = \Delta\rho \text{ cosin. } \varepsilon_{,,}$$

et ces équations combinées avec l'équation $P_{,,} \cos. \varepsilon_{,,} = P'' \cos. \varepsilon''$ de

l'art. 531, donne l'équation $P'' \Delta p'' = P_{,,} \Delta p_{,,}$ telle qu'on la déduirait du principe général.

Réciproquement, si on part de l'équation $P'' \Delta p'' = P_{,,} \Delta p_{,,}$ ou $P'' dp'' = P_{,,} dp_{,,}$ et qu'on y substitue pour dp'' et $dp_{,,}$ leurs valeurs $d\rho \cos \varepsilon''$, $d\rho \cos \varepsilon_{,,}$ on aura l'équation d'équilibre $P_{,,} \cos \varepsilon_{,,} = P'' \cos \varepsilon''$.

535. Supposons que les deux corps m' et $m_{,}$ soient soumis uniquement à l'action de la pesanteur; faisons la distance du centre de gravité de $m_{,}$ au sommet commun B des deux plans inclinés, égale à ρ; la longueur du cordon qui lie les deux corps ensemble étant a, la distance du centre de gravité de $m_{,}$ au même point B sera $a - \rho$; soient de plus y' et $y_{,}$ les distances respectives de m' et $m_{,}$ au plan horizontal passant par B.

Les équations de condition du système seront, en conservant la notation des art. 529 et 531

$$y' = \rho \sin.\, \theta' \;;\; y_{,} = (a - \rho) \sin.\, \theta_{,}$$

la distance du centre de gravité du système des deux corps m' et $m_{,}$ au plan horizontal passant par la base commune des deux plans inclinés sera art. 273 et 283,

$$h - \frac{m' \rho \sin.\, \theta' + m_{,} (a - \rho) \sin.\, \theta_{,}}{m' + m_{,}}$$

cette distance qui ne renferme de variable que ρ, doit être un *minimum* (art. 514) dans le cas de l'équilibre, ce qui donne pour la condition unique de cet équilibre,

$$m' \sin.\, \theta' - m_{,} \sin.\, \theta_{,} = 0$$

c'est l'équation trouvée art. 532.

536. Substituons au plan incliné BD une courbe quelconque $\sigma' M' D$, tracée sur un plan vertical, et proposons-nous de construire, sur le même plan, une autre courbe $\sigma_{,} M_{,} C$ telle que deux corps ou points matériels pesant m' et $m_{,}$ placés sur ces courbes et liés l'un à l'autre par le cordon $M_{,} B M_{,}$, soient en équilibre dans toutes les positions qu'ils pourront prendre sur leurs courbes respectives. Le point B est dans le plan des deux courbes, $D C$ est une base horizontale. Fig. 19

Menons l'horizontale $K' B K$, et traçons les verticales $P' M' \Pi'$, $P_{,} M_{,} \Pi_{,}$ passant par les points où se trouvent m' et $m_{,}$ en supposant la courbe $\sigma_{,} M_{,} C$ décrite.

Soient

Soient $P'M' = y'$ et $P_, M_, = y_,$ on doit avoir, d'après le principe démontré art. 514, $d(m'y' + m_, y_,) = 0$, d'où $m'y' + m_, y_, = C$ et $y_, = \frac{C - m'y'}{m_,}$. Ainsi la courbe $6'M'D$ et un seul point de la courbe $6_, M_, C$ avec les poids m' et $m_,$ étant donnés, la constante C sera déterminée, et pour trouver un point $M_,$ de la courbe $6_, M_, C$ correspondant à un point quelconque M' de la courbe donnée, on calculera d'abord l'ordonnée $P_, M_, = y_, = \frac{C - m'y'}{m_,}$ et on tracera une horizontale HG à la distance $y_,$ de l'horizontale $K'BK_,$. Ensuite d'une ouverture de compas $BM_,$ égale à la différence entre la longueur totale connue du cordon $M'BM_,$ et le rayon vecteur BM', on tracera l'arc $\phi M_, \omega$ dont l'intersection avec HG déterminera le point cherché.

Théorie de l'équilibre d'un corps posé sur deux plans inclinés et sollicité par des forces quelconques. Évaluation des pressions que ces plans ont à supporter. Mesure de la *stabilité* de l'équilibre ; *maximum* de cette *stabilité*.

537. La théorie suivante mérite quelque attention par l'utilité des applications qu'on en peut faire.

Soient ADE et ABF deux lignes représentant deux plans perpendiculaires au plan du tableau, et $DGBHD$ une figure plane matérielle, dont la masse $= M$, couchée sur le plan du tableau, est assujettie à avoir deux points de son périmètre en contact avec les plans AE et AF. Fig. 20

Ce corps M est sollicité par des forces quelconques agissant dans le plan $DGBHD$, dont la résultante est égale à P ; et on demande les conditions de l'équilibre de ce corps, ou plan matériel.

J'élève par les points de contact D et B, sur les lignes AE et AF les perpendiculaires DC et BC, dont l'intersection est en C, et l'équilibre aura lieu si la ligne de direction de la resultante P passe par le point C et si le sens de son action est tel qu'elle tende à pousser le même point C dans l'angle DCB, cette force pouvant d'ailleurs avoir une intensité quelconque.

Il est aisé de voir comment les deux conditions que je viens d'assigner assurent l'équilibre, lorsqu'elles sont satisfaites ; la force P peut toujours, dans ce cas, être complètement remplacée par deux forces dirigées

suivant CD et CB, normales aux lignes AE et AF, et qui pressent les points de contact D et B contre ces lignes; tout mouvement du corps M devient, par-là, impossible.

D'une autre part, on reconnaîtra, avec la plus légère attention, que si la force P n'était pas dirigée par le point C, le corps M, ou se séparerait soit des deux lignes AE et AF soit de l'une d'entr'elles, ou glisserait sur les points de contact.

538. Lorsque le glissement sur les points de contact est le seul dérangement que le corps puisse éprouver, le mouvement initial qui fait parcourir, à ces points, des espaces infiniment petits, sur les lignes AE et AF, leur fait parcourir les mêmes espaces sur les cercles décrits des rayons CD et CB, et déplace ainsi, tous les points du corps M à l'exception du point C; les conditions de l'équilibre, dans ce cas, sont donc évidemment les mêmes que celles que j'ai assignées, art. 146, pour l'équilibre de plusieurs forces agissant sur un plan matériel qui renferme leurs directions et qui a un point fixe.

539. Pour déterminer les pressions normales qui, dans le cas de l'équilibre, s'exercent aux points D et B, je désigne par ψ' et $\psi_{,}$, respectivement, les angles que forme la direction de P avec les lignes AE et AF, et je fais $AD=\xi'$, $DC=\eta'$; $AB=\xi_{,}$, $BC=\eta_{,}$; $AC=\rho$ et j'ai

$$\textit{Pression normale en } D = \frac{\cos.\psi_{,}}{\sin.(\psi_{,}+\psi')}P = \frac{\rho^2}{\eta_{,}\xi'+\eta'\xi_{,}} P \cos.\psi_{,}$$

$$\textit{Pression normale en } B = \frac{\cos.\psi'}{\sin.(\psi_{,}+\psi')}P = \frac{\rho^2}{\eta_{,}\xi'+\eta'\xi_{,}} P \cos.\psi'$$

on peut remarquer que l'angle $EAF=\psi_{,}+\psi'$; les angles BDA et DBA sont supposés être des angles aigus.

Fig. 21 540. Je passe au cas où le corps M continuant à avoir un de ses points en contact avec le plan AE, touche le plan AF par deux points, et je mène par les points de contact B, B' et D des normales BC, $B'C'$, et DC' aux lignes AF et AE, la dernière normale rencontrant les deux autres en C et C', les angles BDA, $B'DA$, DBA, $DB'A$ sont supposés être des angles aigus.

L'équilibre aura lieu lorsque la ligne de direction RQ de la résultante P des forces appliquées au corps, coupera la ligne CC' en un point K placé entre C et C', le sens de l'action de P étant tel que ses composantes prises, respectivement, dans la direction KC, et dans la

direction $K\delta$ parallèle à BC et $B'C'$, tendent à faire presser le corps contre la ligne AE et contre la ligne AF; la force P pouvant, d'ailleurs, avoir une intensité quelconque.

Toute force, agissant sur le corps M, dont la ligne de direction ne passera pas entre C et C', ou séparera le corps, soit des deux lignes AE et AF, soit de l'une d'entr'elles, ou le fera glisser sur le point de contact D et sur l'un des deux autres.

541. Lorsque le glissement, sur le point de contact D et sur l'un des deux autres, sera le seul dérangement que le corps puisse éprouver, le mouvement initial de ce corps lui fera décrire un angle infiniment petit autour du point C ou autour du point C', respectivement, suivant que les points qui glisseront seront D et B ou D et B'. Cette observation correspond à celle de l'art. 538.

542. ψ' et $\psi_{,}$ étant les angles que forme la direction de P avec AE et AF, la pression en D, normale sur AE, est égale à $\dfrac{P\cos.\psi_{,}}{\sin.(\psi_{,}+\psi')}$,

la pression normale sur BB' ayant pour valeur $\dfrac{P\cos.\psi'}{\sin.(\psi_{,}+\psi')}$

543. Cette dernière force est dirigée suivant une perpendiculaire à AF, et je remarque que le point de rencontre de la direction de cette perpendiculaire avec la ligne BB' est entièrement déterminé; en effet la première composante $\dfrac{P\cos.\psi_{,}}{\sin.(\psi'+\psi_{,})}$ de P, normale sur AE, exerçant son action au seul point D par lequel le corps M est en contact avec AE, la direction DK et son point K de rencontre avec la direction RQ de P, sont donnés; ce point K est donc nécessairement un des points de la direction de la seconde composante, et comme $K\delta$ est perpendiculaire sur BB', la position du point de rencontre de $K\delta$ et de BB' est, comme je l'ai dit, entièrement déterminée. On arriverait au même résultat par la décomposition de la force P en deux forces parallèles, appliquées aux points C et C'.

544. Il suit de cette observation que les pressions absolues de B et B' sont aussi données. Pour avoir leurs expressions analytiques, on fera $BB' = a$, $B\delta = b$ et on trouvera aisément, art. 220, les valeurs suivantes des pressions normales en B et $B_{,}$ qui sont, avec la pression en D, les composantes de P.

$$\textit{Pression en } D = \frac{P \cos. \psi_{,}}{\sin. (\psi_{,} + \psi')}$$

$$\textit{Pression en } B = \frac{a-b}{a} \cdot \frac{P \cos. \psi'}{\sin. (\psi_{,} + \psi')}$$

$$\textit{Pression en } B' = \frac{b}{a} \cdot \frac{P \cos. \psi'}{\sin. (\psi_{,} + \psi')}$$

545. Je prends, pour dernier cas d'examen, celui où on suppose que le corps M touche chacun des deux plans AE et AF en deux points ; je me borne, pour abréger, à la combinaison des positions respectives des points de contact représentées par la figure 22, dans laquelle les lignes DB et $D'B'$ qui joignent les deux points les plus voisins et les deux points les plus éloignés du point A, faisant, du côté de ce sommet A, des angles aigus avec l'une et l'autre des lignes AE et AF, les intersections C' et C'' se trouvent dans l'angle EAF. Les élèves appliqueront aisément ce que je dirai, dans cette hypothèse, à toutes les combinaisons possibles des positions des points de contact ; et ce que je dis ici du cas auquel se rapporte la fig. 22, doit s'entendre de ceux que j'ai traité depuis l'art. 537.

Je mène par les points de contact D', D, B, B', des normales à AE et AF et j'ai les intersections C' et C'' par lesquelles je fais passer une droite $SC''C'L$; ensuite P étant, comme ci-dessus, la résultante de toutes les forces appliquées au corps, et agissant dans le sens RQ, j'observe que si sa direction passait entre les points C' et L, le corps prendrait un mouvement initial de rotation, dans le sens $B'BDD'$, autour du centre C', et que ce mouvement initial aurait lieu dans le sens $D'DBB'$ autour du centre C'' dans le cas où la direction de la force passerait entre les points C'' et S. L'équilibre ne peut donc avoir lieu dans aucun de ces deux cas, mais lorsque la direction de la force P passera entre C' et C'', le corps ne pourra prendre aucun mouvement initial et l'équilibre sera assuré si, toutefois chacune des deux composantes de P, perpendiculaire à AE ou à AF, tend à presser le corps contre celle de ces deux lignes à laquelle elle est perpendiculaire.

Fig. 22

546. Je décompose la force P dirigée suivant RQ en deux forces qui lui sont parallèles, respectivement appliquées aux points C' et C''. Les valeurs de ces composantes étant déterminées, les pressions normales en

D, D', B, B' le sont aussi. Soient $C'C'' = a$, $C''K = b$; on aura

$$Composante\ en\ C'' = \frac{a-b}{a}\,P$$

$$Composante\ en\ C' = \frac{b}{a}\,P$$

et les valeurs des pressions des points de contact seront

$$Pression\ en\ D = \frac{b}{a} \cdot \frac{\cos.\,\psi,}{\sin.\,(\psi, + \psi')} \cdot P$$

$$Pression\ en\ D' = \frac{a-b}{a} \cdot \frac{\cos.\,\psi,}{\sin.\,(\psi, + \psi')} \cdot P$$

$$Pression\ en\ B = \frac{a-b}{a} \cdot \frac{\cos.\,\psi'}{\sin.\,(\psi, + \psi')} \cdot P$$

$$Pression\ en\ B' = \frac{a}{b} \cdot \frac{\cos.\,\psi'}{\sin.\,(\psi, + \psi')} \cdot P$$

547. Des points C' et C'', comme centres, décrivons des cercles tangents à la direction RKQ de la force P ; si on applique tangentiellement à l'un de ces cercles, une seconde force égale à P et qui ait, par rapport au centre de ce cercle, un moment dont le signe ne soit pas le même que celui de la première force P par rapport au même centre, le corps sera prêt à prendre un mouvement initial de rotation et le prendra effectivement, si on augmente de la plus petite quantité possible la seconde force P. La *stabilité* de l'équilibre par rapport à chacun des points C' et C'' est proportionnelle au produit de la première force P par le rayon du cercle dont ce point est le centre; et si on veut rapporter exclusivement cette *stabilité* au cas le plus défavorable pour le maintien de l'équilibre, il faut lui donner pour mesure le produit de la force P par le plus petit des rayons des cercles qui ont C' et C'' pour centres.

548. La *stabilité* de l'équilibre, considérée sous ce point de vue, a dans l'hypothèse où les conditions de l'équilibre ci-dessus établies sont satisfaites, un minimum de valeur, qui est zéro et qui a lieu lorsque la direction de P passe par un des points C' ou C'', et un maximum de valeur qui a lieu lorsque la direction de P passe par le point milieu de la droite $C'C''$.

549. Tout ce que je viens de dire, dans le cas où le corps est en contact, par deux points, avec chacun des plans AE et AF, s'applique,

avec les modifications convenables aux cas où les points de contacts seraient en nombre quelconque fini ou infini, et par conséquent à celui où le plan matériel M toucherait les plans AE et AF sur deux lignes; mais il est essentiel d'observer que, lorsqu'il y a plus de deux points de contact sur un des plans, les pressions de chaque point, sur ce plan, ne peuvent plus, en général, se déduire des principes d'équilibre démontrés précédemment, (je parlerai bientôt de la théorie à laquelle le cas qui se présente ici est lié) et on a seulement, la somme de ces pressions, égale à $\frac{P \cos. \psi_{,}}{\sin. (\psi_{,} + \psi')}$ sur le plan AE et à $\frac{P \cos. \psi'}{\sin. (\psi_{,} + \psi')}$ sur le plan AF, $\psi_{,}$ et ψ' ayant la même signification que ci-dessus.

Condition générale de l'équilibre d'un corps pesant, posé sur un plan horizontal; pressions des appuis lorsque le corps est soutenu sur deux ou trois points. Description et usage d'un nouvel instrument à peser. Considérations sur les pressions des appuis, lorsque le corps est soutenu par un nombre quelconque de points; théorie d'EULER.

550. Un corps pesant, posé sur un plan horizontal immobile, est en contact avec ce plan, ou par des points isolés, ou par des lignes, ou par des surfaces. Je suppose que le contact ait lieu par des points, et je décris un polygone fermé, en traçant une première ligne droite par deux des points de contact que j'appelle A et B, tellement placés que tous les autres points de contact se trouvent d'un même coté par rapport à cette ligne, en menant ensuite une seconde droite qui remplisse la même condition par rapport au point B et à un troisième point de contact C, et ainsi de suite, jusqu'à ce que je sois revenu au point A.

La condition unique d'équilibre du corps pesant est que le point de rencontre de la verticale passant par son centre de gravité, et du plan qui supporte ce corps, tombe dans l'intérieur du périmètre du polygone ainsi tracé. Dès que cette condition sera satisfaite, l'équilibre aura lieu et réciproquement; mais si le point de rencontre dont je viens de parler est extérieur au polygone, le corps prendra nécessairement un mouvement initial de rotation autour d'un des côtés ou d'un des sommets d'angles du polygone.

551. Le nombre des points de contacts étant réduit à deux que je désigne par D et B, la verticale passant par le centre de gravité du corps devra, d'après les conditions que je viens d'assigner, tomber, entre ces deux points, sur la ligne droite menée de l'un à l'autre. Soit b la distance du point D à cette verticale, a la longueur de la ligne DB, et P le poids du corps, les pressions des points D et B auront pour valeurs, art. 220,

$$\textit{Pression du point } D = \frac{a-b}{a}\,P$$

$$\textit{Pression du point } B = \frac{b}{a}\,P$$

552. Il est bon de voir comment ces résultats peuvent se déduire des formules données art. 539; je fais passer la direction RQ (fig. 20) de la force P par le sommet A et les valeurs $\frac{\rho^2}{\eta_{,}\xi'+\eta'\xi_{,}}P\,\mathrm{c}.\psi$, et $\frac{\rho^2}{\eta_{,}\xi'+\eta'\xi_{,}}P\,\mathrm{c}.\psi'$. des pressions normales respectives sur D et B, deviennent $\frac{\rho\,\xi_{,}}{\eta_{,}\xi'+\eta'\xi_{,}}P$ et $\frac{\rho\,\xi'}{\eta_{,}\xi'+\eta'\xi_{,}}P$; si on suppose que l'angle EAF augmente jusqu'à devenir égal à deux angles droits, les rapport $\frac{\rho}{\eta_{,}}$, $\frac{\rho}{\eta'}$, $\frac{\eta'}{\eta_{,}}$ varieront en s'approchant continuellement du rapport d'égalité, limite qu'ils atteindront lorsque EAF sera égal à deux angles droits; on aura donc dans cet état extrême,

$$\textit{Pression en } D = \frac{\xi_{,}}{\xi'+\xi_{,}}\,P$$

$$\textit{Pression en } B = \frac{\xi'}{\xi'+\xi_{,}}\,P$$

formules qui s'accordent avec celle de l'article précédent en observant que, dans l'hypothèse d'après laquelle je raisonne, DC, BC et AC deviennent des lignes parallèles, les deux droites EA et FA n'en formant plus qu'une seule, et que ξ', $\xi_{,}$, et $\xi'+\xi_{,}$ représentent respectivement b, $a-b$, et a.

553. Si on suppose art. 544 et fig. 21 que l'angle formé par la ligne AF et par la direction RQ de la force P, est un angle droit, on aura

cos. $\psi_{,} = 0$, cos. $\psi' = \sin.(\psi_{,} + \psi')$; la pression, sur le plan AD, sera nulle, la pression sur le plan AF deviendra égale à P, et les pressions particulières des points B et B' auront pour valeurs respectives $\frac{a-b}{a}P$, $\frac{b}{a}P$.

Ces résultats laissent l'angle ψ' formé par AE et par la direction de la force P entièrement arbitraire, c'est-à-dire que, quelque soit cet angle, les pressions en D, B et B' resteront les mêmes; si on le fait égal à un angle droit, les points E, A et B seront sur une même droite ; supposant alors que P est le poids du corps M, AF une horizontale et $K6$ la verticale passant par le centre de gravité de M, on aura le cas d'un corps pesant porté sur trois points D, B et B' d'une droite horizontale DBB' et, d'après les formules de l'art. cité, les deux appuis ou points de contact B et B' entre lesquels passe la verticale menée par le centre de gravité du corps, devraient se partager le poids entier de ce corps, sans que le point D eut rien à supporter.

554. En introduisant, dans les mêmes formules de l'art. 544, fig. 21, l'hypothèse de $\psi' =$ un angle droit, supposant ensuite que P est le poids du corps M, AE une horizontale, KD la verticale passant par le centre de gravité de M, et faisant l'angle $\psi_{,}$, qui demeure arbitraire, égal à un angle droit, on a le cas d'un corps pesant porté par trois points B', B, D d'une ligne horizontale $B'BAD$, l'un desquels (le point D) appartient à la verticale passant par le centre de gravité du corps, et on trouve que ce point D soutient le corps entier, les pressions des points B et B' étant nulles, résultats qui sont les conséquences des valeurs $\psi' = 0$, $\sin.(\psi_{,} + \psi') = \cos.\psi_{,}$

555. Soit G la projection du centre de gravité du corps pesant M, sur un plan horizontal qui supporte ce corps par les trois points A, B, et C. Nommons P le poids du corps M, Π', Π'' et Π''', respectivement, les pressions que supportent les points A, B et C. La première condition de l'équilibre est art. 550 que le point G soit dans l'intérieur du périmètre du triangle ABC. Fig. 23

On a ensuite (art. 252) pour calculer les trois pressions Π', Π'', Π''', trois équations, savoir; $\Pi' + \Pi'' + \Pi''' = G$, et deux équations des moments (art. 157) par rapport à deux axes rectangulaires tracés dans le plan du triangle ABC. Mais on peut remplacer ces équations par trois

trois autres qui expriment que le moment du poids P, par rapport à chacun des côtés du triangle ABC, est égal à la somme des moments des pressions par rapport au même côté, somme qui se réduit au moment de la pression exercée au sommet opposé a ce côté. En résolvant ainsi le problême et observant que les triangles qui ont même base sont entr'eux comme leurs hauteurs, on arrive à une solution élégante et simple.

Du point G je mène les droites GA, GB, GC, j'abaisse des sommets d'angles A, B, C, les perpendiculaires AS, BT et CR sur les côtés opposés à ces sommets, et enfin du point G les perpendiculaires GH, GK et GL sur les mêmes côtés.

Les moments du poids et des pressions, par rapport à chaque côté, donnent les équations

$$P \times GK = \Pi' \times AS, \text{ d'où } \Pi' = \frac{GK}{AS} \times P = \frac{\text{aire } BCG}{\text{aire } ABC} \times P$$

$$P \times GL = \Pi'' \times BT, \text{ d'où } \Pi'' = \frac{GL}{BT} \times P = \frac{\text{aire } ACG}{\text{aire } ABC} \times P$$

$$P \times GH = \Pi''' \times CR, \text{ d'où } \Pi''' = \frac{GH}{CR} \times P = \frac{\text{aire } ABG}{\text{aire } ABC} \times P$$

On peut remarquer que la somme des expressions qui contiennent les produits de P par les rapports des aires, redonne immédiatement la quantité P, qui doit être égale à $\Pi' + \Pi'' + \Pi'''$.

556. Le résultat très-simple de cette solution est qu'en représentant le poids P par l'aire du triangle ABC, la pression qui s'exerce à chacun des points A, B et C est représentée par celui des triangles partiels BCG, ACG et ABG qui a pour base le côté opposé à ce point.

557. J'ai fait construire une machine à peser, fort simple, et dont la propriété est fondée sur l'égalité $\Pi' + \Pi'' + \Pi''' = P$. Cette machine est composée d'un plateau horizontal, de bois, dont la forme est arbitraire; on peut le faire circulaire ou triangulaire, et il est convenable, pour les usages auxquels il est propre, que son étendue soit telle qu'on puisse y tracer un triangle équilatéral d'un mètre, au moins, de côté. Ce plateau est traversé, en trois de ses points, par autant de tiges de fer cylindriques, de 3 ou 4 millimètres de rayon; ces tiges, taraudées et vissées dans l'épaisseur du plateau, sont, à leurs extrémités inférieures, acérées et terminées en pointes; leurs extrémités supérieures

sont des anneaux verticaux dont les centres se trouvent dans les prolongements des axes des tiges. Les distances entre ces trois tiges sont arbitraires, on peut les placer aux sommets des angles d'un triangle équilatéral de 10 à 12 décimètres de côté.

Lorsqu'on veut se servir de cette machine pour peser, on l'établit sur un plan horizontal, en ayant soin que les pointes de fer portent sur des pierres dures ou sur des plaques de métal; on place le corps à peser sur le plateau, et, avec une balance romaine, ou encore mieux avec un peson à ressort, on mesure la pression supportée par chacun des trois points d'appui, en soulevant ce point d'appui d'une très-petite quantité; lorsque le poids est considérable, on adapte le peson à ressort à un petit levier à *bascule*. La somme des trois pressions, évaluées en unité de poids, diminuée du poids connu de la machine à peser, donne le poids du corps posé sur le plateau.

Cette machine, d'un usage commode, a d'abord l'avantage de pouvoir peser des masses à-peu-près triples de celles que le peson à ressort est capable de supporter, ensorte que si ce peson indiquait 150 kilogrammes, sur son cadran, on pourrait charger la machine (en supposant que son poids propre est de 25 à 50 kilogrammes) de 400 à 450 kilogrammes; ses autres avantages consistent dans la facilité qu'elle donne de peser des corps dont la suspension serait embarassante, si on voulait employer d'autres balances, tels que des tonneaux de liquides, des grains, des animaux etc. Sous ces divers points de vue l'instrument dont je parle doit être commode et utile aux agriculteurs. J'en ai déposé un modèle dans la cabinet de la collection des machines de la *Société d'encouragement*.

558. Je reviens à la théorie générale des pressions des points d'appuis d'un corps pesant, posé sur un plan horizontal, et considérant d'abord le cas de trois points, j'observe que si ces points sont en ligne droite, les formules de l'art. 555 donnent la valeur $\frac{0}{0}$ pour chacune des pressions Π', Π'', Π'''; on se rend aisément raison de ce résultat, en faisant attention que si le triangle ABC, fig. 23, dégénérait en ligne droite, et que les points C et G tombassent, par exemple, en R et H, les aires ABC, BCG, ACG et ABG qui représentent, respectivement, art. cité, le poids P, et les pressions Π', Π'', Π''', s'évanouiraient toutes ensemble, et qu'on aurait ainsi $\frac{0}{0}$ pour l'expression commune de leurs rapports.

559. Si, sans faire aucune hypothèse sur la forme du triangle ABC, on suppose seulement que la verticale passant par le centre de gravité G tombe sur le côté AB, en G', par exemple, dès-lors, d'après le théorème de l'art. 556 la pression du point C devient nulle et les pressions en A et B sont entr'elles dans le rapport de l'aire $CG'B$ à l'aire $CG'A$, ou dans le rapport de $G'B$ à $G'A$, résultat conforme à ce qui a été démontré art. 220 mais la position du centre de gravité du corps étant absolument indépendante de celle de l'appui C, on peut, la distance AG' demeurant constante, placer l'appui C où on voudra, et les pressions, tant absolues que relatives, en A et B, ne changeront pas, quelque petite que soit la distance du point C à la ligne AB, ce qui permet de supposer cette distance évanescente ; et cette conclusion est encore d'accord avec celle de l'art. 553.

560. La verticale, passant par le centre de gravité, peut tomber sur un des points d'appui, le point A, par exemple, et d'après le théorème de l'art. 556 les pressions des points B et C sont nulles, et le point A supporte le poids entier du corps. Or cette conséquence du théorème cité, étant comme celle de l'art. précédent, absolument indépendante de la position du point C, par rapport aux points A et B, ou, si on veut, de la position du point B par rapport aux points A et C, on peut encore supposer que le triangle ABC diffère infiniment peu de la ligne droite, sans avoir de modification à faire à la conséquence dont je viens de parler.

561. Il est un cas où celui des trois appuis A', A'' et A''', placés en ligne droite, qui répond verticalement au centre de gravité, supporte évidemment le poids entier du corps, c'est lorsque cet appui occupe une des positions extrêmes A' ou A''' ; soit $QA'S$ la verticale passant par le centre de gravité, le corps étant en équilibre autour de l'appui A', toute force, quelque petite quelle soit, agissant de bas en haut sur un point K du corps, à une distance horizontale finie de A', soulevera nécessairement ce point K, donc l'appui A est le seul qui oppose de la résistance à une force verticale appliquée au corps de bas en haut, donc il n'y a aucune pression sous les appuis A'' et A'''. Fig. 24

562. Le problême général de la détermination des pressions qu'éprouve chacun des points de contact d'un plan horizontal et d'un corps pesant supporté par ce plan, a occupé des géomètres célèbres ;

il offre un genre d'indétermination singulier et remarquable dans une science exacte.

Le plan et le corps étant supposés incompressibles, les données du problême sont le poids de ce corps, la position de son centre de gravité, et les positions particulières de chacun des points de contact par lesquels il s'appuie sur le plan; or, pour déterminer les pressions de ces points, quelque soit leur nombre, on n'a, d'après les principes connus de la statique, que trois équations, savoir :

$$\Sigma(\Pi)=P\,;\ \Sigma(\Pi x)=aP\,;\ \Sigma(\Pi y)=bP$$

P étant le poids du corps, Π la pression sur l'un quelconque des points d'appui, dont x et y sont les coordonnées, a et b les coordonnées, respectivement parallèles aux x et aux y, du point où la verticale, passant par le centre de gravité du corps, rencontre le plan qui supporte ce corps. Ainsi, le problême est déterminé pour trois points qui ne sont pas en ligne droite, mais dès que le nombre des points de contact excède trois, on a plus d'inconnues que d'équations.

563. Pour concevoir nettement en quoi consiste l'indétermination de la question, et pour juger jusqu'à quel point elle tient à la nature même de cette question, considérons que lorsqu'un corps est porté, par un plan horizontal, sur un nombre quelconque de points d'appui ou de contact, on peut, sans rien changer aux positions de ces points ni à leurs pressions, obtenir un nombre indéfini d'autres points qui se trouveront, comme les premiers, dans le plan horizontal, sans produire aucune pression sur ce plan. Parmi les divers moyens de se procurer ces points de contact, on en peut citer un fort simple, qui consiste à adapter au corps des vis verticales qui le pénètrent de part en part, et dont les pointes inférieures peuvent être approchées du plan horizontal de manière à le toucher sans le presser (et en supposant qu'on produisit une pression, comme elle serait arbitraire dans certaines limites, l'indétermination dont je parle n'en subsisterait pas moins). Or celui qui cherchant les pressions des points de contact d'un corps ainsi disposé, ignorerait qu'il y a plusieurs de ces points auxquels on a donné une pression arbitraire ou nulle, n'aurait aucun moyen de faire entrer en considération ce qui tient à cette circonstance inconnue; le poids du corps, la position de son centre de gravité, le nombre et les positions de ses points de contact, seraient ses seules données, et dans tout cela, rien ne peut faire découvrir des pressions réglées arbitrairement.

Voila donc un problême qu'on sait être déterminé dans chaque cas particulier, et dont la solution se présente généralement sous une forme indéterminée, sans qu'on puisse, conformément aux régles de l'analyse indéterminée ordinaire, considérer comme admissibles les valeurs qui vérifient les équations auxquelles on parvient.

Il semblerait que la condition du contact n'est, pour un point considéré isolément, liée à celle d'aucune pression particulière, peut même avoir lieu sans qu'il y ait de pression et qu'ainsi on est, par la nature même de la chose, privé des données suffisantes.

564. Le célèbre Euler a cherché à lever ou à éluder ces difficultés dans un mémoire curieux qui a pour titre *De pressione ponderis in planum cui incumbit*. (Mémoires de l'académie de Pétersbourg, *novi commentarii* etc. tome 18). Il pose en principe que si les appuis sur lesquels le corps pesant est porté par le plan horizontal, pouvaient s'enfoncer dans ce plan, dont la résistance est censée uniforme, chaque point de contact y pénétrerait à une profondeur proportionnelle à la pression qu'il exerce sur le plan. Or le corps étant de forme invariable, et les points de contact étant, par l'état de la question, dans un même plan avant leur enfoncement, seront, après cet enfoncement, dans un autre plan, dont l'équation, en prenant les x et les y sur le premier plan, aura la forme,

$$\Pi = A + Bx + Cy$$

A, B et C étant des coëfficients constants, et Π désignant l'enfoncement du point de contact qui a x et y pour coordonnées ; mais comme cet enfoncement est, par hypothèse, proportionnel à la pression qui s'exerce au même point, Π peut représenter cette pression.

565. J'observe, d'abord, que la théorie d'Euler ne suppose pas, nécessairement, que les appuis du corps forment des empreintes effectives dans le plan horizontal qui supporte ce corps ; on peut regarder cette hypothèse de pénétration comme un artifice de raisonnement pour arriver à une équation qui contienne une relation générale entre les pressions des points de contact ; et si on veut considérer le corps et le plan horizontal, qui le supporte, comme parfaitement durs et incompressibles, on obtiendra l'équation ci-dessus en posant en principe que des lignes verticales élevées aux différents points de contact, et dont les longueurs sont proportionnelles aux pressions respectives qui s'exercent

à ces points, ont leurs sommets dans un même plan; d'après cette manière d'envisager les choses, les pressions Π seront représentées par des verticales élevées au-dessus du plan horizontal, et comme toutes ces pressions ont lieu dans le même sens, toutes les valeurs de Π, applicables à la question qui nous occupe, devront avoir le même signe que je suppose être le signe positif.

566. Les principes posés dans les deux articles précédents étant admis, l'indétermination singulière dont j'ai parlé art. 563 est entièrement levée; l'évaluation des pressions de touts les points de contact ne dépend plus que de celle des coëfficients A, B et C de l'équation de l'art. 564, et on a pour cette évaluation les trois équations de l'art. 253 desquelles on déduit immédiatement $\Sigma(\Pi)=P$, $\Sigma(\Pi x)=aP$, $\Sigma(Py)=bP$, et, par suite, les points de contacts étant en nombre n,

$$nA + B\,\Sigma(x) + C\,\Sigma(y) = P$$
$$nA\Sigma(x)+B\Sigma(x^2)+C\Sigma(xy)=aP$$
$$nA\Sigma(y)+B\Sigma(xy)+C\Sigma(y^2)=bP$$

les lettres R et P, de l'article cité, sont représentées ici par P et Π, a et b étant les coordonnées, respectivement parallèles aux x et y, du point de rencontre du plan xy et de la verticale menée par le centre de gravité du corps.

Les valeurs de A, B et C tirées de ces trois équations seront substituées dans celle de l'art. 564 et en introduisant, dans cette dernière, les valeurs particulières des coordonnées de chaque point de contact, on aura la pression qui s'exerce à ce point.

567. Lorsque le corps pesant est en contact avec le plan horizontal, par une surface continue, les sommes designées par Σ, dans les équations de l'article précédent, deviennent des intégrales définies doubles, prises dans l'étendue entière de la surface de contact, et on a, pour ce cas, en observant que la pression, sur l'élément differentio-différentiel $dx\,dy$, est en même temps proportionelle a l'ordonnée Π et à l'aire de cet élément,

$$A\iint dx\,dy + B\iint x\,dx\,dy + C\iint y\,dx\,dy = P$$
$$A\iint x\,dx\,dy + B\iint x^2\,dx\,dy + C\iint xy\,dx\,dy = aP$$
$$A\iint y\,dx\,dy + B\iint xy\,dx\,dy + C\iint y^2\,dx\,dy = bP$$

équations qui donneront, comme les précédentes, les valeurs de A, B et

C, lorsque les valeurs déterminées des intégrales définies seront connues.

568. Je renvoie au mémoire pour les applications de ces équations à divers exemples, et je me bornerai à l'examen du cas de trois points d'appui en ligne droite, dont il a déjà été question précédemment. On a, pour ce cas particulier, dont Euler n'a pas parlé,

$$\Pi = A + Bx$$

HH' est la ligne horizontale qui supporte le corps, l'origine des x est en A', NTG est la verticale passant par le centre de gravité du corps; $A'A'' = x_{,}$, $A'A''' = x_{,,}$, $A'T = a$; et on trouve art. 564 et 566, en ne conservant que les coëfficients A et B, Fig. 24

$$Pression\ en\ A' = \Pi' = \frac{x_{,,}^2 - a(x_{,} + x_{,,}) + x_{,}^2}{x_{,}^2 + x_{,,}^2 - x_{,}x_{,,}} \cdot \frac{P}{2}$$

$$Pression\ en\ A'' = \Pi'' = \frac{x_{,,}^2 + a(2x_{,} - x_{,,}) - x_{,}x_{,,}}{x_{,}^2 + x_{,,}^2 - x_{,}x_{,,}} \cdot \frac{P}{2}$$

$$Pression\ en\ A''' = \Pi''' = \frac{x_{,}^2 + a(2x_{,,} - x_{,}) - x_{,}x_{,,}}{x_{,}^2 + x_{,,}^2 - x_{,}x_{,,}} \cdot \frac{P}{2} ;$$

569. Ces équations doivent être applicables à une position quelconque de la projection T du centre de gravité entre les points A' et A'''; si on suppose que cette projection tombe à l'origine A', ou que la verticale $QA'S$ renferme le centre de gravité, la distance $A'T = a$ sera nulle et les équations de l'art. précédent deviendront

$$Pression\ en\ A' = \Pi' = \frac{x_{,}^2 + x_{,,}^2}{x_{,}^2 + x_{,,}^2 - x_{,}x_{,,}} \cdot \frac{P}{2}$$

$$Pression\ en\ A'' = \Pi'' = \frac{x_{,,}^2 - x_{,}x_{,,}}{x_{,}^2 + x_{,,}^2 - x_{,}x_{,,}} \cdot \frac{P}{2}$$

$$Pression\ en\ A''' = \Pi''' = \frac{x_{,}^2 - x_{,}x_{,,}}{x_{,}^2 + x_{,,}^2 - x_{,}x_{,,}} \cdot \frac{P}{2}$$

Ces valeurs satisfont aux conditions générales, $\Pi' + \Pi'' + \Pi''' = P$, et $\Pi'' x_{,} + \Pi''' x_{,,} = 0$, mais elles devraient donner les valeurs particulières $\Pi' = P$, $\Pi'' = 0$, $\Pi''' = 0$, telles qu'on les a eues art. 554 en les déduisant de la théorie exposée art. 537 et suivants; ces valeurs, ainsi que je l'ai observé art. 561, sont évidemment les seules admissibles (puisqu'un effort vertical, aussi petit qu'on voudra, qui s'exercerait de bas en haut, au point A'' ou au point A''', souleverait le corps

en le faisant tourner autour du point A') et cependant on ne les obtient, par les équations précédentes, qu'en supposant $x_{,} = x_{,,}$, ou en réduisant les trois appuis à deux.

570. J'observerai de plus, que la pression en A''' est négative, c'est-à-dire s'exerce de bas en haut, car on a $x_{,,} > x_{,}$, d'où $x_{,,} x_{,} > x_{,}^2$ et cette valeur négative est encore incompatible avec l'état réel des choses, qui ne peut rendre d'autres pressions admissibles, que celles qui s'exercent de haut en bas.

Je crois devoir, en terminant ce que j'ai à dire sur cette matière, dans la première partie de mon cours, citer M. Servois professeur de Mathématiques de l'École d'artillerie de la Garde Impériale, à la Fere, qui a adressé à l'Institut de France, il y a environ un an, un mémoire inédit, dans lequel il déduit, d'une manière fort ingénieuse, des principes de la communication du mouvement entre les corps, la détermination des pressions exercées sur des appuis fixes, par des puissances quelconques; sa solution est fondée sur une théorie qui sera démontrée dans la deuxième partie du cours.

Définition du *coin*, conditions de son équilibre, comment cet équilibre satisfait au principe des vitesses virtuelles; application à la statique des *voûtes*.

Fig. 25 571. AB et AC étant deux lignes égales, le prisme droit qui a le triangle ABC pour base, prend, quand il est employé aux usages mécaniques dont je vais parler, le nom de *coin*.

572. Le *coin* sert en général à séparer deux corps ou deux parties d'un même corps lorsque cette séparation exige un certain effort; on introduit ses *faces* AC et AB entre les points ou les surfaces qu'on veut écarter l'une de l'autre, et on frappe ou on presse la *tête* CB dans le sens DA. Cette machine, une des plus simples, est, en même temps une de celles dont nos besoins nous rappellent le plus souvent la nécessité; on la voit, sous des formes diverses, employée à une infinité d'usages. Tous les outils tranchants et instrument pointus, tels que le coin à fendre du bois, les couteaux, rasoirs, haches, rabots, clous, pieux, pilotis etc., se rapportent à cette machine. Les moyens qu'on employe en bien des occasions, surtout dans la fabrique des *Meules*, pour diviser des blocs de pierre, en insinuant, dans des fentes, des cales de bois

bois qu'on fait gonfler en les arrosant, ceux dont on s'est servi quelque fois pour soulever des masses, en mouillant les cordes sèches qui les soutenaient, en sont encore des dépendances.

Le même instrument est employé, par la nature, dans un nombre infini de ses opérations, et elle l'a sur-tout multiplié dans l'économie animale ; les becs, les cornes, les dents, les griffes, peuvent être regardés comme des coins, et on sait de quelles ressources ils sont aux animaux, pour leur existence alimentaire, pour l'attaque, la défense etc.

573. La théorie physico-mathématique du *coin* est sujette à de grandes incertitudes par le défaut de données suffisantes sur les lois auxquelles sont soumises les résistances qu'on a à vaincre avec cette machine ; mais si on regarde ces résistances comme connues, d'une manière quelconque, en intensités et en directions, les conditions de l'équilibre de la machine sont des conséquences on ne peut pas plus simples de la théorie exposée depuis l'art. 537 jusqu'à l'art. 549.

Supposons que le coin ABC soit destiné à séparer les points K et K' du corps $GHH'LG$, et qu'une puissance P agissant perpendiculairement à sa tête CB, dans le sens DA, soit en équilibre avec les résistances des points K et K' également distants du sommet A ; les conditions $AK = AK'$, et *angle* $CAD =$ *angle* BAD supposent déjà que ces résistances sont égales entr'elles, et si Π désigne l'intensité de l'une ou de l'autre, prise dans la direction KI ou $K'I$ perpendiculaire à AC ou AB, on verra fort aisément que les résultats consignés dans l'art. 539, et appliqués au cas dont il s'agit ici, donnent, en faisant *angle* $CAD = \psi$, l'équation $\Pi = \frac{P \cos. \psi}{\sin. (2\psi)}$, ou

$$\Pi = \frac{P}{2 \sin. \psi}$$

c'est d'ailleurs ce qui se déduirait immédiatement de la décomposition de la force P en deux forces dirigées suivant IK et IK', I étant un des points de la direction de P qui peut être considéré comme son point d'application.

574. Ainsi il y aura équilibre entre la force P agissant suivant DA et deux forces Π, normales sur AC et AB, appliquées à des points K et K' également distants du sommet où arête A, et ayant chacune pour valeur $\frac{P}{2 \sin. \psi}$.

$$\text{on a } \frac{1}{2\sin.\psi} = \frac{AI}{2IK} = \frac{AB}{CB}$$

$$\text{et par conséquent } \Pi = \frac{AB}{CB}.P, \text{ d'où}$$

$$P : \Pi :: CB : AB$$

c'est le théorème, donné dans tous les ouvrages élémentaires, sur l'équilibre du coin.

575. J'ai supposé, pour rendre les résultats immédiatement applicables aux cas usuels, que le profil ABC était un triangle isocèle, et que la direction de la puissance P passait par le milieu de la ligne CB et par le sommet A; mais si on voulait raisonner sur l'équilibre du coin, d'une manière plus générale, relativement à sa forme et à la direction de la puissance qui lui est appliquée, on arriverait aux mêmes relations entre la puissance P et les pressions normales aux points de contact, trouvées art. 537 et suivants. Dans les articles cités, des points de contact mobiles exerçaient des pressions sur des surfaces immobiles; ici on a à traiter le cas inverse, mais la marche du raisonnement et les résultats analytiques sont les mêmes dans l'un et l'autre cas.

Fig. 26 576. En conservant, quant au coin ABC et à la force qui lui est appliquée, les hypothèses de l'art. 573, supposons que ce coin est employé à séparer deux corps Q et Q' posés sur un plan immobile HH' parallèle au plan CB, et dont les profils transversaux, sont les parallélogrammes rectangles $aeKd$ et $a'e'K'd'$, les points de contact K et K' étant, comme à l'art. cité, à égales distances du sommet A, et cherchons la valeur commune de deux puissances égales qui appliquées en K et K' parallèlement à HH' et à CB, ou perpendiculairement à AD, feraient équilibre à la force P.

La composante de P, normale à AC et agissant en K, qui a pour valeur $\frac{P}{2\sin.\psi}$, étant elle-même décomposée en deux forces, l'une parallèle et l'autre perpendiculaire à HH', on a une première force $\frac{P}{2\sin.\psi} \times \cos.\, CAD$ ou $\frac{P}{2\,\text{tang.}\,\psi}$ agissant dans le sens Ke, et une seconde force $\frac{P}{2\sin.\psi} \times \sin.\, CAD$ ou $\frac{1}{2}P$ agissant dans le sens Kd. Cette dernière est détruite par la résistance du plan HH': donc

une force $\frac{P}{2 \text{ tang. } \psi}$, agissant dans le sens eK, contrebalancera l'effort que P exerce sur le corps Q; et une force égale, appliquée en K' dans le sens $e'K'$, contrebalancera l'effort que le corps Q' a à soutenir.

En résumé le système des trois corps ABC, Q et Q' sera en équilibre si, appliquant une force P au premier corps, dans la direction et dans le sens DA, on applique aux corps Q et Q' des forces égales $\frac{P}{2 \text{ tang. } \psi}$, dans les directions respectives et dans les sens eK et $e'K'$. Désignant par Θ l'une ou l'autre de ces deux forces on a

$$\Theta = \frac{P}{2 \text{ tang. } \psi}$$

577. Imaginons que chacun des systèmes représenté par les figures 25 et 26, éprouve un dérangement qui fasse parcourir au point I de concours des directions des forces en équilibre appliquées au coin ABC un espace fini égal à Ii, dans le sens de la ligne DA; menant les parallèles ik et ik' à AC et AB et formant les triangles rectangles Iki, $Ik'i$ dont les angles droits sont en k et k', fig. 25, et en I, fig. 26, les espaces parcourus par le point I et par les points K et K', dans des directions parallèles aux forces P et Π, fig. 25, ou P et Θ, fig. 26, seront, respectivement, égaux à Ii, Ik et Ik'; le théorême de l'art. 85 donne, en ayant égard aux sens des actions de ces forces,

Figure 25 . . . . $P \times Ii - 2\,\Pi \times Ik = 0$

Figure 26 . . . . $P \times Ii - 2\,\Theta \times Ik = 0$

Par la première équation, $\Pi = \frac{Ii}{2\,Ik} \times P = \frac{P}{2 \text{ sin. } \psi}$;

Par la seconde équation, $\Theta = \frac{Ii}{2\,Ik} \times P = \frac{1}{2} P \text{ cotang. } \psi = \frac{P}{2 \text{ tang. } \psi}$,

et on déduit ainsi du principe des vîtesses virtuelles les mêmes conditions d'équilibre que celles qui ont été trouvées art. 573 et 576.

578. Je me restreins, pour abréger, aux notions les plus élémentaires sur l'équilibre du *coin*, et je supprime, par le même motif, les recherches relatives à l'équilibre d'un système de coins. J'ai traité cette matière, avec beaucoup de détail, dans le premier tome de mon *architecture hydraulique*, depuis l'art. 346 jusqu'à l'art. 379, où j'ai donné une théorie complète de la *statique des voûtes*, contenant toutes les

explications nécessaires pour faciliter l'application des résultats analytiques à la pratique des constructions. Une des conséquences curieuses de cette théorie est le rapprochement, fait art. 377 de l'ouvrage cité, entre la courbure d'une voûte en *berceau* dont les *voussoirs*, sollicités par des forces quelconques, se font mutuellement équilibre, et celle d'une corde parfaitement flexible et inextensible retenue par ses extrémités et sollicitée aussi, à chacun de ses points, par des forces quelconques. Des marches de raisonnement et d'analyse très-différentes, dans l'un et l'autre cas, conduisent à la même équation d'équilibre.

L'identité des résultats dont je viens de parler se conclut des considérations générales précédemment exposées art. 501 et 514, et j'ai établi, dans ce dernier article, la distinction entre les deux espèces d'équilibre qu'offre le système des corps durs appuyés les uns contre les autres, et la courbe funiculaire.

De la poulie simple et des systêmes de poulies; équilibre des forces appliquées à ces systêmes; principe des vitesses virtuelles vérifié par cet équilibre.

Fig. 27 579. Imaginons un solide engendré par la révolution d'un parallélogramme rectangle $abcd$, autour de sa base dc, le milieu du côté ab étant infléchi suivant la courbe $\alpha\beta\gamma$; ce solide aura la forme de la machine simple appellée *poulie*. La surface courbe engendrée par la courbe $\alpha\beta\gamma$, sur laquelle s'applique la corde, se nomme *gorge* de la poulie.

La poulie, dans les usages mécaniques auxquels on l'employe, tourne autour d'un axe AA' qui, dans certains cas est fixé à son centre, et dans d'autres cas, traverse cette poulie, sans faire corps avec elle, par un trou pratiqué à ce même centre.

L'axe est supporté, soit par des appuis ou *paliers* fixes, soit par une pièce mobile qu'on appelle *chape*, (voyez fig. 28 et 29). Je n'insiste pas d'avantage sur ces notions qui sont familières aux élèves.

Fig. 28 et 29 580. M' étant un poids dont une puissance M doit empêcher la descente par le moyen de la corde $MDEM'$, enroulée sur la poulie C, il est évident que le poids M' et l'effort exercé par M seront, dans le cas de l'équilibre, égaux entr'eux. La poulie ne sert ici qu'à produire ce qu'on appelle un *renvoi* de mouvement; elle procure au moteur le moyen de prendre différentes directions dans un plan vertical perpendiculaire à son axe.

581. M et M' sont, comme précédemment, la puissance motrice et la masse pesante (à laquelle on peut réunir le poids de la poulie et celui de sa chape) que cette puissance doit tenir en équilibre; la corde à l'extrémité de laquelle le moteur exerce son action, est attachée, par son autre extrémité, à un point fixe. Fig. 30

Désignant par ε, l'angle que forme la verticale avec le cordon auquel M est appliquée, on a,

$$M = \tfrac{1}{2} M' \cos. \varepsilon$$

582. Si le cordon auquel le moteur est appliqué passe sur un point fixe, la poulie prendra une position facile à déterminer, ainsi que je l'ai fait voir en parlant du polygone funiculaire.

583. Le moteur M exerce son action à l'extrémité d'une corde qui passe sur un point fixe A et s'enroule sur la poulie 1; l'autre extrémité de cette corde est attachée au point fixe B. On a ainsi, un système de poulies 1, 2, 3, etc. sur lesquelles s'enroulent des cordes dont chacune est attachée, par un bout à la chape de la poulie précédente, et par son autre bout, à un point fixe C, D, etc. un poids R, suspendu à la chape de la dernière poulie doit être tenu en équilibre par le moteur M. Fig. 31

Soient n le nombre des poulies, t', t'', t''', etc., les tensions des cordons qui s'enroulent, respectivement, sur les poulies 1, 2, 3, etc., on aura, en désignant par $2\varepsilon'$, $2\varepsilon''$, $2\varepsilon'''$, etc. les angles respectifs que forment entr'elles les deux directions de chacun des cordons qui éprouvent les tensions t', t'', t''', etc.

$$\begin{aligned}
t' &= M \\
t'' &= 2t' \cos. \varepsilon' \\
t''' &= 2t'' \cos. \varepsilon'' \\
&\vdots \\
t^{(n)} &= 2t^{(n-1)} \cos. \varepsilon^{(n-1)} \\
R &= 2t^{(n)} \cos. \varepsilon^{(n)}
\end{aligned}$$

584. On déduit de ces équations

$$M = \frac{R}{2^n \cos. \varepsilon' \cos. \varepsilon'' \ldots \cos. \varepsilon^{(n)}}$$

(n) et $(n-1)$ sont des numéros d'accentuation, et n un exposant.

585. La figure 32 se rapporte à un cas moins général que les précédents, celui où le système est disposé de manière que les cordons sont parallèles entr'eux; cette condition se trouve remplie lorsque la distance Fig. 32

horizontale entre le premier point fixe A et le deuxième point fixe B étant égale au diamètre de la poulie 1, les distances horizontales entre B et C, entre C et D, etc., sont, respectivement, égales au rayon de la poulie 2, au rayon de la poulie 3, etc. On a, dans ce cas

$$M=\frac{R}{2^n}$$

Fig. 33, 34 et 35. 586. La relation entre le poids R dont on veut empêcher la descente et le moteur M, destiné à lui faire équilibre, est aisée à appercevoir dans les systèmes auxquels se rapportent les fig. 33, 34 et 35, qui représentent les combinaisons de poulies qu'on appelle des *moufles*. Chacun de ces systèmes, qu'on suppose disposé de manière que les cordons soient parallèles, se compose de deux parties, l'une supérieure qui est un assemblage de poulies dont les axes sont toujours à la même distance verticale du point fixe de suspension de tout le système, et l'autre inférieure à laquelle le poids est attaché, et qui peut s'élever ou s'abaisser. Cette partie inférieure est suspendue à la supérieure par autant de cordons qu'il y a de poulies dans l'une et l'autre, et ces cordons, qui forment les sous-divisions d'une même corde continue, parfaitement flexible, sont tous également tendus; ainsi n étant le nombre des poulies du système, et t la tension d'un des cordons, le poids R plus le poids de la partie inférieure du système de poulies, équivalent à nt; mais le moteur M, appliqué à l'extrémité de la corde, n'ayant à contrebalancer que la tension de cette corde, fait, dans le cas de l'équilibre, un effort égal à t, d'où on conclut

$$M=\frac{R}{n}$$

587. On voit, par ce qui précède, que la poulie est une machine également remarquable et par sa simplicité et par ses propriétés mécaniques, aussi son usage est-il très-répandu, sur-tout dans la marine. Il est on ne peut pas plus facile de voir comment cette machine vérifie le principe des vîtesses virtuelles, et, dans le cas du parallélisme des cordons, cette vérification a lieu pour des espaces finis, parcourus par les points d'application du moteur et de la résistance. En effet, dans le système représenté fig. 32, l'espace vertical parcouru par chaque poulie est toujours moitié de l'espace correspondant parcouru par la poulie immédiatement supérieure, et double de celui que parcourt la poulie immédiatement

inférieure, d'où on conclut, n étant le nombre des poulies, que les lignes décrites en même temps par les points d'application du moteur de la résistance, sont entr'elles dans le rapport de $2^n : 1$.

Dans le cas des systêmes représentés par les figures 33, 34 et 35, si le poids R parcourt un espace vertical h, la longueur de chacun des n cordons variera de h, et la variation de la somme de ces longueurs, sera nh, égale à l'allongement de la partie de corde comprise entre le point d'application du moteur et la première poulie, égale, par conséquent, à la ligne décrite par ce point, la corde étant supposée toujours tendue; cette ligne est donc à la variation de hauteur du poids comme $n : 1$.

588. Étant donné un systéme quelconque sollicité par des forces dont les intensités et les directions sont aussi quelconques, on peut toujours concevoir une combinaison de moufles, adaptées à ce systéme, telle que d'autres forces feraient sur les points du systéme, par le moyen de ces moufles, en remplissant certaines conditions données, précisément le même effet que les premières forces auxquelles on pourrait les substituer. L'auteur de la *Mécanique analytique* a donné une démonstration du principe des vitesses virtuelles, aussi curieuse qu'ingénieuse, fondée sur des transformations de cette espèce. (Voyez le *Journal de l'École Polytechnique.*)

Du levier et de ses différentes espèces; problême sur le levier pesant; principe des vitesses virtuelles considéré particulièrement dans l'équilibre des forces appliquées à cette machine.

589. Un *levier* est, en général, un corps assujetti à tourner autour d'un point ou d'un axe fixe. J'ai donné, dans la deuxième section de ce traité, la théorie complète de l'équilibre d'un pareil corps, et des pressions que supportent les points et les axes fixes; je me bornerai à présenter ici, quelques notions élémentaires applicables à la mécanique pratique, et dans lesquelles le levier est considéré comme une verge inflexible, assujetti à tourner autour d'un point ou d'un axe fixe, et sollicité par des forces qui agissent dans un plan renfermant ce point, ou perpendiculaire à cet axe.

590. En simplifiant ainsi la forme du corps et supposant qu'il n'est sollicité que par deux forces dont l'une est le *moteur* et l'autre la *résis-*

tance, on distingue, dans la mécanique appliquée, trois espèces de machines comprises sous la dénomination générique de *levier*, savoir:

Le *levier* de la première espèce, dont le point d'appui, ou l'axe de rotation est entre les points d'application du *moteur* et de la *résistance*.

Le *levier* de la seconde espèce sur lequel le point d'application de la *résistance* est entre l'axe et le point d'application du *moteur*.

Enfin le *levier* de la troisième espèce, sur lequel le point d'application du *moteur* est entre l'axe et le point d'application de la *résistance*.

591. L'équilibre de chacune de ces espèces de levier dépend, d'après ce qui a été amplement expliqué et démontré dans la deuxième partie de ce traité, d'une condition unique; cet équilibre a lieu lorsque les moments (art. 157) du moteur et de la résistance, par rapport à l'axe de rotation, sont égaux et de signes contraires.

592. On aura égard, quand il sera nécessaire, à la pesanteur du levier, en introduisant, dans l'équation d'équilibre, la somme des moments des poids de toutes les molécules qui composent sa masse, avec les signes convenables.

Le levier pesant de la deuxième espèce donne lieu à un problème de minimum dont il est bon de placer ici la solution.

Lorsqu'on veut, par le moyen d'un pareil levier, que je suppose être une verge droite, homogène et uniformément grosse, faire équilibre à un poids P placé à une distance a du point d'appui ou de l'axe, p étant le poids de l'unité de longueur du levier, M le moteur, x la distance de son point d'application à l'axe qui est censé être la longueur totale du levier, on a, dans le cas de l'équilibre,

$$Mx = aP + \tfrac{1}{2}px^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

(M agit verticalement de bas en haut) on déduit de cette équation

$$M = \frac{aP + \frac{1}{2}px^2}{x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

et on voit que $M = \infty$, tant lorsque $x = \infty$ que lorsque $x = 0$. Entre ces deux limites se trouve le point où il faut appliquer M pour que son effort soit un minimum, et la position de ce point se détermine par l'équation,

$$x = \sqrt{\left(\frac{2aP}{p}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

La

La valeur minimum, correspondante de M, se calcule par l'équation

$$M=\sqrt{2\mu p P} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

593. L'application du principe des vîtesses virtuelles à l'équilibre du levier est un cas très-particulier de la théorie relative à ce principe, que j'ai exposée dans la troisième section de ce traité; voici comment on peut, indépendamment de cette théorie générale, démontrer fort-simplement que l'équilibre du levier, tel que je le considère ici, vérifie le principe des vitesses virtuelles.

M et R étant le moteur et la résistance qui se font équilibre par l'intermède d'un levier, abaissons, du point d'appui, des perpendiculaires m et r sur leurs directions respectives, et menons, du même point d'appui aux points d'application de M et R sur le levier, des droites désignées par μ et ρ.

Supposant ensuite que le système tourne dans le plan des forces M et R et autour du point d'appui, d'une quantité angulaire infiniment petite $d\phi$, on démontrera aisément que les projections des longueurs absolues des arcs élémentaires décrits par μ et ρ, faites sur les directions des forces M et R, sont respectivement égales aux longueurs absolues des arcs élémentaires décrits par m et r; ces dernières longueurs ont pour valeurs $m\,d\phi$ et $r\,d\phi$, et l'équation $M.m\,d\phi-R.r\,d\phi=0$, donnée par le principe des vîtesses virtuelles, se trouve identique avec l'équation d'équilibre $Mm-Rr=0$, déduite des principes élémentaires de la statique.

Du *tour* et de ses différentes espèces, telles que le *treuil* et le *cabestan*.

594. On fait un grand usage, dans la mécanique-pratique, d'une machine qui a le nom générique de *tour*, et dont les diverses variétés se rapportent toutes au levier. Fig. 36, 37 et 38

Cette machine est composée d'un arbre ou corps cylindrique, qui tourne sur deux tourillons, placés à ses extrémités et appuyés sur des *paliers*, ou retenus dans des trous circulaires.

Une corde, enroulée sur cet arbre, s'attache au poids qu'on veut enlever et, en général, au point où est appliquée la résistance qu'on veut vaincre ou contrebalancer; ce à quoi on parvient en faisant tourner l'arbre, ou en lui donnant une tendance au mouvement de rotation, dans le sens convenable. Les forces motrices, qui donnent ce mouve-

ment, ou cette tendance au mouvement, sont appliquées, ou aux extrémités des leviers qui traversent l'arbre et lui sont perpendiculaires, ou à des manivelles, ou à différents points de la circonférence d'une roue fixée et concentrique à l'*arbre*.

595. Le *tour* prend le nom de *treuil* lorsque l'arbre est dans une position horizontale, et celui de *cabestan* lorsque l'arbre est vertical; on l'emploie, particulièrement, dans la marine, sous cette dernière forme.

La position horizontale de l'arbre de laquelle résulte la position verticale du plan dans lequel agissent les forces motrices, fournit le moyen d'employer la roue à *tympan* mue par le poids des hommes et même des animaux; des roues de cette espèce sont souvent adaptées aux *grues* et on les applique à plusieurs autres machines.

596. Tout ce que je pourrais dire sur l'équilibre du *tour* et sur les pressions des *tourillons*, dans le cas de l'équilibre, est textuellement et complètement exposé depuis l'art. 368 jusqu'à l'art. 382. Il me suffira d'avoir donné ici une idée des principaux modes d'application de la théorie des art. cités, qui ont été adoptés dans la mécanique pratique.

Il y a cependant une observation essentielle, relativement à la grosseur d'une corde enroulée sur un *arbre* ou *cylindre*, que je ne dois pas omettre. Le bras de levier d'un poids suspendu à une corde ainsi enroulée, et, en général, celui d'une force quelconque, qui tend cette corde, pris par rapport à l'axe du cylindre, doit toujours se mesurer depuis ce même axe jusqu'à l'axe de la corde, et être, par conséquent, égal à la somme des longueurs du rayon du cylindre et du rayon de la corde. P étant la puissance, r et ρ les deux rayons dont je viens de parler, le moment (art. 457) de P, par rapport à l'axe du cylindre, a pour valeur $P\ (r+\rho)$

De la *vis*; conditions de l'équilibre de cette machine; comment ces conditions vérifient le principe des vitesses virtuelles. Moyen de réunir, dans la vis, la solidité à une grande puissance mécanique.

Fig. 39 nos. 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7.

597. La *vis* est une combinaison particulière du levier et du plan incliné, et sa théorie participe de celle de ces deux machines.

Les élèves ayant une connaissance exacte et complète de la génération et de la composition de la vis, dont ils font une étude détaillée dans le cours de *géométrie descriptive*, je me contente, pour abréger,

de mettre sous leurs yeux, les figures, en forme d'*épure*, d'une vis à *filets carrés* et d'une vis à *filets triangulaires*.

598. Supposons qu'une vis, mise dans la situation verticale et ayant son *écrou* fixe, supporte un poids dont le centre de gravité se trouve dans la verticale passant par l'axe de la vis, et cherchons les conditions de l'équilibre entre ce poids et une force horizontale agissant perpendiculairement à un levier horizontal dont l'axe rencontrerait celui de la vis.

Soit P la somme des poids du corps à tenir en équilibre et de la vis elle-même, M la force horizontale qui doit établir cet équilibre, h la hauteur du pas de vis, r la distance du point d'application de M à l'axe de la vis, et ρ la distance entre cet axe et le milieu de la saillie du filet. (D'après la valeur assignée à ρ, on peut, dans les cas d'application les plus ordinaires, substituer pour le calcul, à la vis donnée, une vis fictive dont le filet aurait une saillie infiniment petite, sur un *arbre* d'un rayon égal à ρ.)

Il résulte de la composition de la machine que la vis, supportant le poids, tend à descendre le long de l'*hélice* suivant laquelle les filets de l'*écrou* sont courbés, de la même manière qu'un corps grave tendrait à descendre sur un plan incliné formant, avec l'horizon, un angle dont la tangente trigonométrique serait $\frac{h}{2\pi\rho}$ (π est la demi circonférence dont le rayon $= 1$). Appliquons au filet de cette vis, une puissance horizontale M' dirigée suivant une ligne dont la distance à l'axe vertical soit $=\rho$, cette puissance M' fera équilibre au poids P, si sa valeur satisfait à l'équation d'équilibre du plan incliné donnée art. 530.

$$M'=\frac{h}{2\pi\rho}P\left\{\begin{array}{l}\text{la tangente trigonométrique } \frac{h}{2\pi\rho}\\ \text{représente } \frac{\sin.\theta'}{\cos.\theta'}\end{array}\right.$$

Supposant que M' a la valeur qu'on vient d'assigner, je la décompose en deux forces horizontales, qui lui sont parallèles, l'une dirigée sur l'axe de la vis, et l'autre ayant son point d'application à une distance r de cet axe. La première composante est détruite par la résistance de l'écrou, et l'autre qui a pour valeur $\frac{\rho}{r}M'$, est capable de

remplacer, seule, la puissance M', relativement à l'équilibre qu'on veut obtenir. Cette valeur $\frac{\rho}{r} M'$, ou $\frac{h}{2\pi r} P$ est donc celle que doit avoir le moteur M, agissant à une distance r de l'axe de la vis, pour faire équilibre au poids P, et les conditions de cet équilibre sont exprimées par l'équation

$$M = \frac{h}{2\pi r} P.$$

« M est à P comme la hauteur h du pas de vis est à la circonférence « décrite du rayon r, longueur du bras de levier du moteur M. »

599. Supposons que, par une cause quelconque, le poids P et la vis montent ou descendent d'une hauteur kh (k étant un nombre abstrait quelconque), le point d'application du moteur M décrira, dans le sens horizontal, un arc dont la valeur angulaire sera $2\pi k$ et la longueur absolue $2\pi k r$. (Il faut observer que ce point d'application pourrait être sur une corde, qui aurait une partie de sa longueur enroulée autour d'une poulie concentrique à l'arbre de la vis et dont le rayon serait $= r$, la direction de M demeurant toujours tangente à la circonférence de la poulie) or l'équation déduite du principe des vîtesses virtuelles et appliquée à des espaces finis parcourus par les points d'applications des puissances, donne $2\pi k r M - k h P = 0$, conditions d'équilibre identiques avec celles qui ont été assignées dans l'article précédent.

600. Il résulte de ces conditions que le moteur M a d'autant plus d'avantage pour tenir le poids P en équilibre, que la hauteur h du pas de vis est plus petite; mais cet avantage s'acquiert aux dépens de la solidité et de la durée de la machine, parce que, pour un arbre de vis d'un diamètre donné et sur une longueur déterminée de cet arbre, on ne peut *serrer* les pas de vis, c'est-à-dire multiplier le nombre des filets, qu'en diminuant leurs forces.

Voici cependant un moyen de donner au moteur un avantage indéfini pour faire équilibre à une résistance, en employant des filets de vis de dimensions arbitraires.

Fig. 40 AB et CD sont deux montants immobiles auxquels l'écrou fixe E est attaché. Un autre écrou e peut se mouvoir entre ces deux montants, et on le guide en pratiquant des rainures le long de AB et CD, dans lesquelles coulent des tenons taillés sur les flancs de e.

On a taillé, sur l'arbre de la vis *VV*, en *ff* et $\phi\phi$ deux pas de vis différents, dont l'un convient à l'écrou fixe *E*, et l'autre à l'écrou mobile *e*, et d'après cette disposition si on tourne la vis dans un sens ou dans l'autre, le poids *P* (la vis étant supposée verticale) suspendu à l'écrou mobile *e*, par les brides, ou liens quelconques, *mn* et *m'n'*, aura le même mouvement vertical que si la vis n'avait qu'un seul filet dont la longueur de *pas* serait égale à la différence entre les longueurs de *pas* des deux vis taillées sur l'arbre *VV*, et les conditions de l'équilibre sont les mêmes que si ce filet unique existait réellement.

Voilà donc l'énergie de la machine, pour tenir un poids en équilibre, rendue d'autant plus grande que la différence entre deux longueurs de pas de vis est plus petite, et comme, en donnant aux filets de chacune de ces vis une grosseur et une solidité arbitraires, la différence entre leurs *pas* peut être rendue aussi petite qu'on veut, la condition demandée se trouve ainsi remplie.

J'ai eu l'idée de l'emploi d'un arbre de vis à deux filets, comme celui que je viens de décrire, en m'occupant de la perfection des *micromètres* astronomiques auxquels j'ai appliqué cette idée avec tout le succès désirable. On peut consulter, pour de plus amples détails, une note que j'ai publiée dans un des derniers volumes de la *Connaissance des temps* et le *Traité des machines* de MM. BETANCOURT et LANZ.

Des systêmes de *roues dentées* et de *pignons*. Comment les conditions d'équilibre de ces systêmes vérifient le principe des vitesses virtuelles.

601. La théorie géométrique des *engrénages*, celle de la forme des *dents* des *roues* et des *ailes* des *pignons* se trouvant comprise dans les leçons de *géométrie descriptive* que reçoivent les élèves je supprimerai, pour abréger, tous les détails relatifs à ces divers objets d'étude.

La figure 41 représente un systême de *pignons* et de *roues dentées* par le moyen duquel un moteur *M* fait équilibre à un poids *P*. Le moteur *M* est appliqué tangentiellement à la circonférence d'une roue qui n'est pas dentée, faisant la fonction de poulie, et portant à son centre, le premier pignon. Ce pignon s'engrène dans la première roue dentée qui porte à son centre, un deuxième pignon lequel s'engrène dans une seconde roue dentée portant, à son centre, un troisième pignon, et ainsi

Fig. 41

de suite. Le poids P est suspendu à une corde enroulée sur un cylindre fixé et concentrique à la dernière roue dentée.

Tous les axes de rotation sont fixes, parallèles entr'eux et compris dans un même plan horizontal. Il s'agit de trouver les conditions de l'équilibre entre M et P.

602. Je désigne par m le rayon de la roue sans denture, ou poulie, à laquelle la direction de M est tangente, et par p le rayon de l'arbre sur lequel s'enroule la corde à laquelle le poids P est suspendu; m et p étant, conformément à l'observation de l'art. 596, mesurés depuis les axes de la poulie et du cylindre, jusqu'à l'axe de la corde.

Je nomme r', r'', r''', etc., les rayons respectifs de la 1ere, de la 2e, de la 3e, etc. roue dentée; ρ', ρ'', ρ''', etc. les rayons respectifs du 1er, 2e, 3e, etc. pignon. Ces rayons sont ceux qu'on appelle *rayons moyens* dont les rapports, entr'eux, représentent les rapports de nombre de *dents* des roues, ou des nombres d'*ailes* des pignons.

Soit, de plus, k' la pression qu'exercent l'une sur l'autre, dans le cas de l'équilibre du système, l'aile du premier pignon et la dent de la première roue qui se trouvent en contact, pression qui a lieu sur le point où les extrémités des *rayons moyens* ρ' et r' se rencontrent, et désignons par k'', k''', etc. les pressions correspondantes du 2e pignon sur la 2e roue dentée, du 3e pignon sur la 3e roue dentée, etc., on aura les équations successives,

$$\begin{aligned} Mm &= \rho' k' \\ r' k' &= \rho'' k'' \\ r'' k'' &= \rho''' k''' \\ &\vdots \\ r^{(n-1)} k^{(n-1)} &= \rho^{(n)} k^{(n)} \\ r^{(n)} k^{(n)} &= Pp \end{aligned}$$

n est le nombre des roues dentées égal à celui des pignons; $^{(n)}$ et $^{(n-1)}$ sont des numéros d'accentuation.

603. On déduit, de ces équations, l'expression suivante de la condition d'équilibre.

$$Mm r' r'' r''' \;.\;.\;.\; r^{(n)} = Pp \rho' \rho'' \rho''' \;.\;.\;.\; \rho^{(n)}$$

dans laquelle on peut, aux *rayons moyens* r', r'', r''', etc., ρ', ρ'', ρ''', etc. substituer, respectivement, les nombres des dents des roues et les nombres des ailes des pignons.

604. Supposons que le système se dérange de la situation d'équilibre de manière que la roue, sans denture, ou poulie, à laquelle la direction du moteur est tangente tourne d'une quantité angulaire finie ϕ, les angles respectifs décrits par les 1re, 2e, 3e, etc. et n^e roues dentées seront

1re. roue dentée . . . $\frac{\rho'}{r'}\phi$

2e. . . . . $\frac{\rho'}{r'}\cdot\frac{\rho''}{r''}\phi$

3e. . . . . $\frac{\rho'}{r'}\cdot\frac{\rho''}{r''}\cdot\frac{\rho'''}{r'''}\cdot\phi$

. . . .

. . . .

n^e. . . . . $\frac{\rho'}{r'}\cdot\frac{\rho''}{r''}\cdot\frac{\rho'''}{r'''}\;\ldots\ldots\;\frac{\rho^{(n)}}{r^{(n)}}\cdot\phi$

Les espaces absolus parcourus par les points d'application de M et de P seront donc ϕm et $\left(\frac{\rho'}{r'}\cdot\frac{\rho''}{r''}\;\ldots\ldots\;\frac{\rho^{(n)}}{r^{(n)}}\right)\phi p$; or on déduit du principe des vîtesses virtuelles appliqué au cas où les espaces correspondants parcourus par les points d'application des forces sont finis, l'équation

$$M\phi m - P\left(\frac{\rho'}{r'}\cdot\frac{\rho''}{r''}\;\ldots\ldots\;\frac{\rho^{(n)}}{r^{(n)}}\right)\phi p = 0$$

identique avec celle de l'article précédent, en divisant par ϕ.

Observations générales sur le *frottement* et l'*adhérence*.

605. Lorsqu'un moteur et une résistance sont en équilibre sur une machine, dans l'état où j'ai considéré, jusqu'à présent, cette espèce de système, si l'intensité de l'un ou de l'autre vient à varier d'une quantité indéfiniment petite, l'équilibre est nécessairement rompu. Mais cette manière d'envisager l'équilibre des machines est purement idéale, et, dans l'état réel et physique des choses, le moteur ou la résistance peuvent varier, dans certaines limites, sans que l'équilibre ou plutot l'*état de repos* de la machine cesse d'avoir lieu.

Ainsi R étant une résistance et M un moteur qui, sur une machine

donnée, vérifient les équations par lesquelles j'ai exprimé, jusqu'à présent, les conditions abstraites de l'équilibre de cette machine, le moteur M n'est pas physiquement prêt à mettre la machine en mouvement comme il semblerait qu'on peut le conclure de la théorie exposée dans cette section et dans la précédente; il faut, pour qu'il arrive à ce point, que son intensité s'accroisse d'une certaine quantité μ, et la machine restera dans l'état d'équilibre ou de *repos* sous tous les efforts exercés au point d'application du moteur, dont les valeurs seront plus grandes que M et plus petites que $M+\mu$.

606. Cet état de *repos* n'a pas lieu seulement pour les accroissements de M, depuis M jusqu'à $M+\mu$, mais encore pour ses diminutions depuis M jusqu'à $M-\mu'$, ensorte qu'une machine étant donnée, si on a une résistance R et un moteur M, d'intensités telles que ces puissances appliquées à la machine, satisfassent aux conditions d'équilibre assignées jusqu'à présent, l'état de repos de la machine subsistera tant que la valeur de l'effort exercé au point d'application du moteur sera plus grande que $M-\mu$ et plus petite que $M+\mu$; la variation totale, entre ces deux limites, est $\mu+\mu'$; les quantités μ et μ' sont, en général, différentes l'une de l'autre. A la première limite le moteur est prêt à céder à la résistance; à la seconde la résistance est prête à céder au moteur.

607. On ne peut appliquer le principe des vîtesses virtuelles à cet état de choses que d'une manière hypothétique. Si l'une des deux forces M et R est prête à céder à l'autre, ou si M a atteint l'une des deux limites dont j'ai parlé dans l'article précédent, on supposera R augmenté ou diminué, respectivement, d'une quantité ρ ou d'une quantité ρ', satisfaisant avec μ, ou avec μ', aux conditions de l'équilibre indépendantes du frottement et de l'adhérence, et, faisant alors abstraction des circonstances physiques auxquelles sont dues les variations μ et μ', on aura les combinaisons de forces $M+\mu$, $R+\rho$; $M+\mu'$, $R+\rho'$, dont chacune vérifiera le principe des vîtesses virtuelles.

608. Ces variations dont l'effort du moteur est susceptible depuis l'état où il est prêt à être vaincu par la résistance jusqu'à celui où il est prêt à la surmonter, sont dues à certaines résistances particulières, qu'on peut atténuer plus ou moins, mais qui résultent nécessairement de la composition matérielle de toute machine, et dont la plus considérable est, en général, le *frottement*.

Si

Si un corps pesant est supporté par un plan horizontal, l'effort parallèle à ce plan, qu'il faut exercer pour faire glisser ce corps sur le même plan est dû, uniquement, à la résistance dont je viens de parler, en même temps qu'il en donne la mesure; on sait que, sans le *frottement*, le corps céderait à l'effort le plus léger.

Une résistance de même nature se manifeste toujours, tant lorsqu'on fait glisser deux surfaces l'une sur l'autre, que lorsqu'on exerce simplement un effort tendant à produire le même effet pourvu qu'il y ait *pression* entre ces deux surfaces.

609. Toutes les machines, destinées au mouvement, doivent être construites de manière à diminuer le frottement autant qu'il est possible, et c'est là une des qualités essentielles qu'il faut leur procurer. Cependant il y a une infinité de cas où la mécanique pratique tire un parti très-avantageux du *frottement*. On l'a employé pour remplacer les engrenages, il assure l'effet des *freins* employés pour modérer ou arrêter, à volonté, le mouvement, et contribue beaucoup à celui des machines, dont la classe est très-nombreuse, qui n'ont pour objet que de tenir une résistance en équilibre. Dans plusieurs circonstances cet effet est produit par le frottement seul, et je citerai, en exemple, les cordes dont un petit nombre de tours, sur des cylindres, suffit pour résister à une tension énorme. L'accord des cordes des instruments de musique ne se maintient pas par d'autres moyens.

Sans le frottement, la marche des hommes et celle des animaux serait on ne peut pas plus difficile et peu stable; c'est lui qui rend possible l'usage que nous faisons, pour des besoins qui se répètent à chaque instant, de divers instruments qu'il faut tenir dans les mains et qui s'en échaperaient sans cesse, si le frottement ne les retenait pas quand on les tient serrés.

610. Le frottement, dans l'acception que je viens de donner à ce mot, est appellé *frottement de la première espèce*, et on en distingue un autre, qui s'appelle *frottement de la deuxième espèce;* cette dernière résistance est celle qu'éprouvent, dans leurs mouvements, les corps qui roulent sur des plans ou sur des surfaces quelconques, en les pressant avec la condition que les points ou les lignes de contact ne font qu'appuyer sur les surfaces, sans *glissement*.

Les pertes de forces, dues au frottement de la 2e espèce, sont infini-

ment moindres que celles qui résultent du frottement de la 1re espèce, et on en tient rarement compte dans le calcul de l'effet des machines.

611. Il est une autre espèce de *résistance*, dans le jeu des machines, due aux contacts des surfaces, mais indépendante, en général, de la pression, c'est l'*adhérence*. Cette résistance peut être très-forte lorsque les surfaces ont été long-temps en contact et sans mouvement, mais si elle est une fois surmontée, et que le mouvement de la machine se continue, elle diminue considérablement d'intensité et devient souvent insensible. Je l'introduirai cependant, avec la résistance du frottement, dans les questions d'équilibre que j'aurai bientôt à résoudre et dont les solutions seront suivies de quelques détails sur d'autres résistances occasionnées par la *roideur* des *cordes* et des *chaînes*.

Mesure du frottement et de l'adhérence.

612. J'ai dit que la *résistance* due au frottement n'avait lieu qu'autant que les surfaces en contact étaient pressées l'une contre l'autre, et l'expérience a appris qu'elle était sensiblement proportionnelle à la pression normale. On peut, dans la pratique, n'avoir aucun égard aux anomalies, peu considérables, que souffre cette loi.

613. Parmi les différents moyens de s'assurer, par le fait, de la vérité de ces propositions, on en peut distinguer deux; par l'un de ces moyens que j'ai décrit, fort en détail, dans mon *Architecture hydraulique*, (art. 1090 et suiv.) où j'ai donné la description et les dessins des appareils, on évalue immédiatement les forces horizontales qui peuvent faire glisser, sur un plan horizontal, un corps d'un poids donné.

Ce premier moyen a fait connaître que les forces capables de faire équilibre au frottement du corps étaient proportionnelles au poids de ce corps, et par conséquent à la pression normale sur le plan qui le supportait.

614. On a aussi conclu, des mêmes expériences, que le frottement était indépendant de la grandeur de la surface de contact, pourvu cependant qu'on ne la diminuat pas jusqu'à en faire un arrête, ou une pointe, capable de pénétrer le corps sur lequel elle devait glisser.

615. Le second moyen d'évaluer le frottement a l'avantage de la simplicité et de la commodité de l'appareil, et on en déduit une expression analytique qui sera bientôt utilement employée.

Soit un corps, dont le poids $= P$, posé sur un plan, et concevons qu'on incline graduellement ce plan jusqu'à ce que le corps P soit prêt à glisser et à descendre. Désignant, par ϕ, l'angle que le plan fait, alors, avec l'horizon; on a deux composantes de P, l'une P cos. ϕ, égale à la pression normale exercée sur le plan, l'autre P sin. ϕ qui agit parallèlement au plan et tend à faire descendre le corps. Or puisque P n'est retenu sur ce plan, depuis sa position horizontale jusqu'à son inclinaison ϕ, que par le frottement, et que P sin. ϕ est la seule force agissant contre cette résistance, on est assuré, lorsque P est prêt à glisser (c'est-à-dire lorsque le plus léger effort peut déterminer son mouvement), que P sin. ϕ a atteint une valeur précisément égale à celle du frottement; P sin. ϕ est donc la mesure de l'intensité de cette résistance, et peut être introduite, comme telle, dans le calcul de l'équilibre du corps sur le plan incliné.

616. Le rapport entre le frottement P sin. ϕ et la pression normale P cos. ϕ, a pour valeur $\frac{P \sin. \phi}{P \cos. \phi}$, ou tang. ϕ; c'est le rapport de la hauteur du plan incliné à sa base.

617. Posons ensuite sur la surface, qui a servi à évaluer le frottement de P, un autre corps de même nature, et du même degré de poli, sur sa surface, que ce corps P, et dont le poids $= P'$; soit ϕ' l'angle sous lequel P' est prêt à glisser, son frottement sera P' sin. ϕ' et le rapport du frottement à la pression normale aura pour valeur tang. ϕ'. Or on a trouvé, par expérience, que, même dans les cas où les poids P et P', et les étendues de leurs surfaces de contact différaient beaucoup, les angles ϕ et ϕ' étaient à peu près les mêmes. On a donc tang. $\phi =$ tang. ϕ',

$$\text{d'où on conclut } \frac{P \sin. \phi}{P \cos. \phi} = \frac{P' \sin. \phi'}{P' \cos. \phi'}, \text{ et}$$

$$P \sin. \phi : P' \sin. \phi' :: P \cos. \phi : P' \cos. \phi'$$

Les frottements P sin. ϕ et P' sin. ϕ', sont entr'eux comme les pressions normales P cos. ϕ et P' cos. ϕ'

618. L'angle ϕ s'appelle *angle du frottement* et, d'après ce qui précède, en multipliant par la tangente de cet angle une pression normale N, on a la résistance du frottement N tang. ϕ qui a lieu dans le sens de la surface sur laquelle la pression s'exerce, ϕ étant l'angle du frotte-

ment qui convient aux deux corps en contact et à l'état des surfaces par lesquelles ils se pressent.

619. Il est essentielle d'avoir égard à la condition posée à la fin de l'article précédent, lorsqu'on veut faire des calculs exacts sur l'effet des machines. L'angle ϕ, ou le rapport tang. ϕ, constant pour les mêmes corps et le même état de leurs surfaces de contact, varie considérablement lorsque ces surfaces sont plus ou moins polies, lorsqu'elles sont, ou non enduites et que les enduits sont plus ou moins frais, lorsqu'on fait glisser deux pièces de bois, l'une sur l'autre, à fils parallèles ou à fils cruisés, etc. à parité de ces diverses circonstances, l'angle ϕ varie encore avec les matières en contact, surtout lorsque les surfaces ne sont pas enduites. Des corps de différentes matières donnent, en général, moins de frottement que des corps de même matière etc. etc.

J'ai traité ce sujet fort en détail dans mon *Architecture hydraulique*, tome 1, depuis l'art. 1089 jusqu'à l'art. 1208; j'y ai donné, avec la description des expériences, des tableaux très-étendus de leurs résultats.

620. La résistance due à l'*adhérence*, n'est pas susceptible, pour le calcul de l'effet des machines, d'une évaluation fort exacte. J'ai déjà fait observer que cette résistance dépendait du temps pendant lequel les corps adhérents avaient été en contact dans l'état de repos, et qu'elle s'atténuait considérablement dans les machines en mouvement; c'est donc principalement dans le passage du repos au mouvement que son effet a lieu; cet effet peut presque toujours être regardé comme momentané, et comme devenant d'autant plus faible que le service de la machine est moins interrompu.

621. A étant la force nécessaire pour surmonter l'adhérence, c'est-à-dire pour séparer deux corps adhérents sur l'unité de surface, et E la valeur effective de la surface adhérente, j'introduirai, dans l'analyse, le produit AE, que je désignerai par K, pour représenter la résistance due à l'adhérence sur la surface totale E. Je ferai ainsi l'adhérence proportionnelle à la surface de contact; je supposerai, de plus, qu'elle résiste également dans tous les sens et qu'elle est indépendante de la pression; par tous ces caractères, elle diffère essentiellement de la résistance due au frottement.

En faisant ainsi l'adhérence indépendante de la pression, quant à ses effets mécaniques, on fait abstraction des moyens par lesquels on peut

la produire, dans certains cas, on a des exemples d'adhérences dues à de fortes pressions ou à des percussions, mais comme ces adhérences subsistent après que les corps ont été pressés ou frappés, elles sont alors soumises aux lois ci-dessus assignées. D'ailleurs ces cas d'adhérence ne se rencontrent pas dans les questions relatives au calcul des machines.

De l'équilibre, sur le plan incliné, en ayant égard au *frottement* et à l'*adhérence*.

622. Un corps pesant, dont le poids $= P$, est posé sur un plan incliné et une puissance M agissant dans un plan vertical perpendiculaire à ce plan incliné, est destiné à faire équilibre au poids P; il s'agit de déterminer les conditions de cet équilibre, en ayant égard au frottement et à l'adhérence.

La question, ainsi posée, est plus générale qu'elle ne le semble d'abord, le poids P représente une puissance quelconque, dont la direction serait perpendiculaire à la base horizontale du plan incliné, et les solutions relatives aux cas où cette circonstance n'aurait pas lieu, se déduiront aisément, par les théorèmes connus de la trigonométrie élémentaire, des formules que je vais donner.

Le corps posé sur le plan incliné, sera censé être un plan matériel vertical et perpendiculaire à ce plan incliné, et je supposerai, pour simplifier, que, d'après sa position, sa forme, et les directions des forces qui agissent sur lui, il n'a aucune tendance au mouvement de rotation.

623. Soient maintenant ψ et ϖ les angles respectifs que forment avec la verticale, la longueur du plan incliné et la direction de M, ε l'angle que font entr'elles cette longueur et cette direction, f la tangente de l'angle ϕ du frottement, et K l'adhérence sur la surface totale de contact, ou le produit AE de cette surface E par l'adhérence A sur l'unité de surface.

Il faut, d'après ce qui a été dit précédemment, distinguer deux destinations que M peut avoir, dans l'hypothèse de l'équilibre, et qui sont, l'une d'exercer sur le corps P, un effort tel que le moindre effort additionnel occasionnerait son ascension, l'autre d'empêcher, simplement, la descente de P en profitant du frottement et de l'adhérence. L'analyse suivante s'applique également à l'une et à l'autre destination; les résistances fN et K y seront considérées, dans les cas *limites* dont je viens

de parler, comme des puissances *actives* dirigées, suivant la longueur du plan incliné, ayant le sens de leurs actions du sommet à la base, ou de la base au sommet, suivant qu'on voudra établir le calcul d'après le premier ou d'après le second de ces deux cas.

Si, de plus, on considère N comme une puissance qui tend à écarter le corps du plan incliné, on pourra regarder ce corps comme *libre*, et les équations de son équilibre seront de même forme que celles de l'art. 72.

Voici les composantes qui doivent entrer dans les équations d'équilibre, et qui sont :

Dans le sens horizontal.	Dans le sens vertical.
$M \sin. \omega$	$M \cos. \omega$
$N \cos. \psi$	$N \sin. \psi$
$fN \sin. \psi$	$fN \cos. \psi$
$K \sin. \psi$	$K \cos. \psi$
	P

Tous les termes de chaque équation d'équilibre étant supposés dans un même membre, ceux de ces termes, qui renferment M et P, ont des signes différents. $N \cos. \psi$ et $N \sin. \psi$ doivent avoir, la première un signe différent de celui de $M \sin. \omega$, et, la seconde, le même signe que $M \cos. \omega$; enfin, les signes des termes qui renferment le frotement fN et l'adhérence K doivent être, ou ne pas être, les mêmes que ceux des termes qui renferment M, suivant que M aura, ou n'aura pas, en sa faveur, la résistance du frotement et de l'adhérence.

624. On parvient, en ayant égard à ces diverses observations, aux équations suivantes d'équilibre

$$(1) \ldots \begin{cases} M \sin. \omega - N \cos. \psi \mp fN \sin. \psi \mp K \sin. \psi = 0 \\ M \cos. \omega + N \sin. \psi \mp fN \cos. \psi \mp K \cos. \psi - P = 0 \end{cases}$$

Le signe supérieur a lieu lorsque M doit être prêt à l'emporter sur P, et le signe inférieur a lieu dans le cas contraire ainsi que je l'ai expliqué plus haut.

Éliminant N on arrive à l'équation unique

$$(2) \ldots \frac{M \sin. \omega \mp K \sin. \psi}{P - M \cos. \omega \pm K \cos. \psi} = \frac{\cos. \psi \pm f \sin. \psi}{\sin. \psi \mp f \cos. \psi}$$

625. Tirant la valeur de M de l'équation (2) de l'art. précédent, et observant que $\omega - \psi$ est égal à l'angle ε formé par la direction de M et par la longueur du plan incliné, on a

$$M = \frac{P\,(\cos.\,\psi \pm f \sin.\,\psi\,) \pm K}{\cos.\,\varepsilon \mp f \sin.\,\varepsilon}$$

cette équation qui, seule, assure l'équilibre, lorsqu'elle a lieu, s'obtient d'une manière simple et immédiate, en considérant que, puisque le corps, d'après les conditions assignées, ne peut se mouvoir que dans le sens de la longueur du plan incliné, il suffit, pour énoncer qu'il y a équilibre, de dire que la somme des composantes pararelles à la longueur du plan incliné est égale à zéro, ou qu'on a

$$M \cos.\,\varepsilon - P \cos.\,\psi \mp f\,(P \sin.\,\psi + M \sin.\,\varepsilon) \mp K = 0$$

équation identique avec la précédente. J'aurais pu substituer la marche de raisonnement et d'analyse que je viens d'indiquer à celle des deux articles précédents, s'il n'était pas utile de multiplier les exemples des applications des méthodes et des formules générales; d'ailleurs l'équation (2) de l'article précédent, qui se déduit directement des équations (1) du même article, a, sous la forme que je vais lui donner des applications fort importantes.

626. Substituant, dans cette équation (2) dont je viens de parler, pour f, sa valeur tang. ϕ ou $\frac{\sin.\,\phi}{\cos.\,\phi}$, le 2[e] membre devient égal à cotang. $(\psi \mp \phi)$ et on a

$$(1) \ldots\ldots\ldots \frac{P - M \cos.\,\omega \pm K \cos.\,\psi}{M \sin.\,\omega \mp K \sin.\,\psi} = \text{tang.}\,(\psi \mp \phi)$$

et la valeur de M prend la forme

$$(2)\ldots M = \frac{P \pm K\,\{\cos.\,\psi + \sin.\,\psi\ \text{tang.}\,(\psi \mp \phi)\}}{\cos.\,\omega + \sin.\,\omega\ \text{tang.}\,(\psi \mp \phi)}$$

On peut arriver à cette valeur en partant de l'équation de l'art. 625, mais moins simplement qu'en la déduisant de l'équation (2) de l'art. 624.

627. Lorsque M est une puissance horizontale, on a ε = *complément* de ψ; l'équation de l'art. 625 devient

$$(1) \ldots\ldots\ldots M = \frac{P\,(\cos.\,\psi \pm f \sin.\,\psi) \pm K}{\sin.\,\psi \mp f \cos.\,\psi}$$

et l'équation (2) de l'art. précédent, donne, en observant que, dans le cas dont il s'agit ici, $\cos.\,\omega = 0$, $\sin\,\omega = 1$

$$(2) \ldots\ldots M = \frac{P \pm K\,\{\cos.\,\psi + \sin.\,\psi\ \text{tang.}\,(\psi \mp \phi)\}}{\text{tang.}\,(\psi \mp \phi)}$$

Déterminations des limites entre lesquelles la valeur du moteur peut varier, eu égard au frottement et à l'adhérence, sans que l'état de repos du corps cesse d'avoir lieu sur le plan incliné.

628. On détermine aisément, par les équations des articles précédents, les variations de la valeur de M entre les limites dont j'ai parlé, article 605 et suivants, et on trouve que depuis la limite inférieure, celle où M se trouve prêt à céder au poids P, jusqu'à la limite supérieure, celle où le poids P se trouve prêt à céder au moteur M, la variation totale est, pour le cas de l'art. 625,

$$\frac{2(fP\sin.\varpi+K\cos.\varepsilon)}{\cos.^2\varepsilon-f^2\sin.^2\varepsilon},$$

et pour le cas de l'article 627

$$\frac{2(fP+K\sin.\psi)}{\sin.^2\psi-f^2\cos.^2\psi}$$

La valeur minimum de M, celle qui convient à la limite inférieure, peut être augmentée de toute quantité plus petite que l'une ou l'autre de ces variations (suivant le cas que l'on considère) sans que le corps P sorte de l'état de repos.

629. Dans le cas général de l'art. 625, la variation totale de M, à partir de la valeur $M=\frac{\cos.\psi}{\cos.\varepsilon}P$, qui convient à l'équilibre, abstraction faite du frottement et de l'adhérence, est du côté de la limite supérieure,

$$\frac{Pf\sin.\varpi+K\cos.\varepsilon}{\cos.\varepsilon(\cos.\varepsilon-f\sin.\varepsilon)}$$

et du côté de la limite inférieure

$$\frac{Pf\sin.\varpi+K\cos.\varepsilon}{\cos.\varepsilon(\cos.\varepsilon+f\sin.\varepsilon)}$$

Le cas de l'article 627 donne, du côté de la limite supérieure,

$$\frac{Pf+K\sin.\psi}{\sin.\psi(\sin.\psi-f\cos.\psi)}$$

et du côtè de la limite inférieure,

$$\frac{Pf+K\sin.\psi}{\sin.\psi(\sin.\psi+f\cos.\psi)}$$

On

On voit que la valeur de M, convenable au cas où on fait abstraction du frottement et de l'adhérence, n'est pas, en général, ainsi que j'en ai prévenu art. 606, moyenne arithmétique entre ses valeurs limites.

630. Ces déterminations et ces remarques sont curieuses et peuvent être appliquées utilement dans plusieurs circonstances. Au reste, les considérations générales, auxquelles toute la théorie des limites des forces M et P se trouve liée, sont susceptibles d'être présentées d'une manière directe et fort simple.

Soit le plan incliné BC sur lequel le corps pesant P est posé en T, PT étant la direction et le sens d'action de la pesanteur, et MT la direction et le sens d'action de la puissance M. J'élève la perpendiculaire TK sur BC, dans le plan MTP, et je mène, dans le même plan, les lignes TF et TF' faisant, chacune, avec TK un angle égal à l'angle ϕ du frottement. Soit QT la direction de la résultante de M et de P; les directions des deux composantes étant supposées constantes, la direction de QT ne peut varier que par les changements d'intensités de M et de P; or si on suppose, d'abord, que QT se confonde avec KT, on aura le cas de l'équilibre sans frottement; introduisant ensuite le frottement (je suppose, pour simplifier, que l'adhérence est nulle) et augmentant la valeur de M, convenable au cas d'équilibre dont je viens de parler, ou diminuant celle de P, qui convient au même cas, la ligne QT se mouvra dans l'angle KTM, en tournant autour du point T, et il y aura repos du système jusqu'à ce que QT se confonde avec FT; alors la force M sera prête à mettre le corps P en mouvement dans le sens TC, et l'y mettra réellement, si par une nouvelle augmentation de son intensité, ou une diminution de P, on fait passer la direction de QT dans l'angle FTB. Fig. 42

Si, à partir de la coïncidence de KT et de QT et des valeurs de P et M qui ont lieu lorsque cette coïncidence existe, on eut augmenté P, ou diminué M, le mouvement de la ligne QT aurait eu lieu dans l'angle $F'TK$, l'état de repos du corps aurait subsisté jusqu'à la coïncidence de QT et de $F'T$, et lorsque QT serait entré dans l'angle $F'TC$ le poids aurait commencé à se mouvoir dans le sens TB.

Ainsi, en résumé, l'état de repos a lieu tant que la direction QT, de la résultante de M et de P, se trouve dans l'angle $F'TF$, et le mouve-

ment est produit dans le sens TC ou dans le sens TB, suivant que la direction QT passe dans l'angle FTB ou dans l'angle $F'TC$.

De la direction la plus avantageuse à donner à une force qui doit, ou faire monter un poids le long d'un plan incliné, ou simplement empêcher sa descente.

631. La valeur de M, donnée art. 625, contient l'angle ε formé par la direction de M et par la longueur du plan incliné, qu'on peut déterminer de manière que M soit un *minimum*.

Faisant donc $\frac{dM}{d\varepsilon} = 0$ on trouve

$$-\sin.\varepsilon \mp f\cos.\varepsilon = 0, \text{ d'où, } \tang.\varepsilon = \mp f$$

Ce résultat nous apprend qu'on employera le moteur avec le plus grand avantage possible, lorsqu'on lui donnera une direction faisant, avec la longueur du plan incliné, un angle égal à l'angle du frottement, et suivant qu'il devra surmonter le frottement et l'adhérence, ou s'en aider, son action aura lieu dans un sens tel qu'il tende, en même temps, à faire monter le corps le long du plan incliné ou à le soulever au-dessus de ce plan, ou à le presser contre ce même plan.

632. On a, pour la valeur minimum de M, résultat de la détermination précédente,

$$M = \frac{P(\cos.\psi \pm f\sin.\psi) \pm K}{(1+f^2)^{\frac{1}{2}}}$$

les signes supérieur et inférieur conviennent respectivement au 1er et au 2e emploi à faire du moteur, expliqués dans l'art. précédent.

633. La différence entre les deux valeurs minima que je viens de déterminer est égale à

$$\frac{2(Pf\sin.\psi + K)}{(1+f^2)^{\frac{1}{2}}}$$

634. Pour comparer ces résultats avec ceux qu'on obtiendrait en donnant à M une direction parallèle au plan incliné, direction qui, au premier coup d'œil, pourrait sembler la plus favorable, il faut, dans l'équation de l'art. 625, faire $\varepsilon = 0$, ce qui donne

$$M = P(\cos.\psi \pm f\sin.\psi) \pm K$$

valeur qui est toujours plus grande que celle de l'art. 632 puisqu'on a $\sqrt{1+f^2} > 1$.

635. On peut remarquer que, dans cette hypothèse particulière du parallélisme entre la direction de M et la longueur du plan incliné, la valeur de M convenable, pour l'équilibre, au cas où on fait abstraction du frottement et de l'adhérence, est moyenne arithmétique entre la plus grande et la plus petite valeur que M peut prendre, lorsque le frottement a lieu, sans que l'état de repos du système soit troublé. La variation, du côté de chaque limite, est, art. 629, égale à $Pf \sin. \omega + K$, la variation entre les deux limites est, art. 628, $2(Pf \sin. \omega + K)$

De la résistance due au frottement d'une corde qui s'enroule sur un cylindre.

636. J'ai parlé, art. 609 de la grande résistance que pouvait opposer, par son frottement, une corde enroulée, d'un petit nombre de tours, sur un cylindre; il est bon de faire voir la conformité de la théorie avec cette vérité d'expérience.

Soit un cylindre immobile, que je supposerai, pour fixer les idées, mis dans une position horizontale; une puissance M est appliquée à l'extrémité d'une corde qui, après avoir fait un certain nombre de tours sur le cylindre, tient suspendu, à son autre extrémité, un poids P auquel M doit faire équilibre, en profitant, pour alléger son effort, du frottement de la corde sur le cylindre. Ainsi P doit être prêt à surmonter M plus la résistance due au frottement.

Soient σ la longueur de la corde enroulée, depuis le premier point où cette corde touche le cylindre, du côté de M, point qui est l'origine de σ, jusqu'à un point quelconque de la partie enroulée; τ la tension de la corde à ce dernier point; p la somme des pressions qui ont lieu sur les arcs élémentaires $d\sigma$, dans toute l'étendue de σ; r le rayon du cylindre.

Le poids P étant prêt à surmonter M et le frottement, il est évident que la tension τ, à l'extrémité de σ, doit faire équilibre au frottement, sur la longueur entière de σ, plus à la force M, ce qui donne, f étant comme ci-dessus le rapport du frottement à la pression,

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tau = fp + M.$$

Ensuite il résulte de la tension τ, qui a lieu dans le sens de l'élément

de courbe $d\sigma$, une pression normale sur cet élément, égale au produit de τ par le sinus de l'angle de contact ou par $\frac{d\sigma}{r}$, et cette pression, sur $d\sigma$, est la différentielle de la somme des pressions sur l'arc entier σ, on a donc

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad dp = \frac{\tau d\sigma}{r}$$

différentiant l'équation (1) et éliminant dp entre cette équation différentiée et l'équation (2), on trouve $\frac{d\tau}{f} = \frac{\tau d\sigma}{r}$, d'où

$$(3) \ldots\ldots \quad \frac{d\tau}{\tau} = \frac{f d\sigma}{r}, \text{ et } \log. \tau = \frac{f\sigma}{r} + C.$$

On a en même temps $\sigma = 0$ et $\tau = M$, d'où $C = \log. M$; et la tension, à un point quelconque, se calcule par l'équation, $\log. \left(\frac{\tau}{M}\right) = \frac{f\sigma}{r}$, de laquelle on déduit, en passant des logarithmes aux nombres,

$$(4) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \tau = M e^{\frac{f\sigma}{r}}$$

e est le nombre dont le logarithme naturel $= 1$; on a $e = 2,71828$ et le logarithme vulgaire de $e = 0,43429448$.

On voit, par l'équation (4) que les longueurs σ croissant en progression arithmétique, les tensions τ croissent en progression géométrique.

637. Pour connaître, d'après ces déterminations et ces valeurs, l'avantage que M retire du frottement de la corde, désignons par λ la longueur totale de sa partie enroulée sur le cylindre, et observant qu'à l'extrémité de λ, du côté de P, la tension $= P$, on a d'après l'équation (4) de l'article précédent,

$$P = M e^{\frac{f\lambda}{r}} \text{. d'où } M = P : e^{\frac{f\lambda}{r}}$$

Je suppose $f = \frac{1}{3}$ (et il serait aisé de rendre cette valeur encore plus forte, pour une corde de chanvre enroulée sur du bois) et faisant successivement λ égale au produit de la circonférence décrite du rayon r par les nombres $\frac{1}{2}$, 1, 2, 3, etc., je forme la table suivante

Pour $\frac{1}{2}$ tour . . . . $M = 0{,}35106.\ P$
1 tour . . . . $M = 0{,}12320.\ P$
2 tours . . . . $M = 0{,}01519.\ P$
3 tours . . . . $M = 0{,}00187.\ P$
4 tours . . . . $M = 0{,}00023.\ P$
5 tours . . . . $M = 0{,}000028.\ P$
etc.

On voit que, pour un seul tour, l'effort M est déjà moindre que la 8e partie du poids dont il doit empêcher la descente; cet effort diminue ensuite suivant une progression très-rapide, et, passé 4 ou 5 tours, M peut être considéré comme infiniment petit par rappurt à P.

Application de la théorie du plan incliné à la poussée des terres, en ayant égard au frottement et à la cohésion.

638. J'ai publié, en 1804, un petit traité théorique et pratique sur *la poussée des terres, la forme et les dimensions des murs de revêtement,* qui contient des théorêmes nouveaux au moyen desquels il m'a été possible de donner très-simplement l'analyse générale des problêmes que ce sujet comporte, analyse qui, jusqu'alors, n'avait pas été donnée d'une manière aussi complète. Je vais déduire les propositions fondamentales de ma théorie de celles que j'ai précédemment démontrées depuis l'art. 605 jusqu'à l'art 627.

Soit $AKFD$ une droite horisontale et $ABCD$ la section, faite par un plan vertical, d'une masse de terre homogène, appuyée contre un plan vertical (représentée par la ligne AB) auquel le plan $ABCD$ est perpendiculaire, et qui est le parement intérieur d'un mur de revêtement. La masse de terre $ABCD$ peut se trouver dans deux états qu'il faut soigneusement distinguer, dont l'un répond au cas où les molécules qui la composent conserveraient, entr'elles, la cohésion qu'elles acquièrent après un certain temps de repos, et l'autre au cas où ces terres auraient été fraichement remuées. Fig. 43

Si le premier cas a lieu et que, donnant à la verticale AB une hauteur suffisante, on suppose que les terres ne sont plus soutenues par le plan que cette verticale représente, une partie ABK de ces terres se séparera

de la partie *KBCD*, suivant une ligne de rupture *BK*, et on a reconnu, par expérience, que cette ligne était sensiblement une ligne droite.

Dans le second cas la suppression du plan représenté par *AB* occasionnera, quelque soit la hauteur *AB*, l'éboulement d'une masse de terre *ABF*, sur une ligne de séparation *BF* plus inclinée que *BK* et qui est, comme cette dernière, sensiblement une ligne droite, ce dont on s'est pareillement assuré par l'observation.

639. Les résistances surmontées par le poids des terres lorsque la rupture a lieu sur la ligne *BK*, sont la *cohésion* (qui peut, considérée sous le point de vue mécanique, être, à tous égards, assimilée à l'*adhérence*) et le *frottement*. La première de ces deux résistances est détruite par le *remuement* des terres, lorsque la séparation a lieu sur la ligne *BF*, et le frottement reste seul.

L'angle *FBC* (*BC* étant une droite horizontale), est donc l'*angle du frottement*, puisque, après l'éboulement du triangle *FBA*, la tendance que la pesanteur donne aux molécules, placées sur le talus *FB*, pour glisser dans le sens *FB*, est détruite par le frottement.

640. Considérant les terres dans l'état de *Cohésion* et supposant que le profil *ABB'A'* a la stabilité nécessaire pour empêcher l'éboulement du triangle *ABK*, il est évident que si ce triangle, en conservant son poids, devenait un plan matériel de forme invariable, ayant sur *BK* le même frottement et la même cohésion que les terres, il se tiendrait, par lui-même en équilibre sur cette ligne *BK*, et la ligne *AB* ne supporterait aucun effort. Mais dans l'état réel des choses les terres tendent à couler sur toute ligne *BG* menée dans l'angle *KBA*, et si les masses *ABG* et *GBCD* devenaient parfaitement solides, la cohésion et le frottement naturels aux terres continuant d'avoir lieu sur la ligne *BG*, ces résistances ne seraient plus capables de retenir seules le triangle *ABG* sur cette ligne, et il faudrait, pour empêcher sa descente, leur réunir une force horizontale que je désigne par *M*.

641. J'observe maintenant que, parmi les positions qu'on peut donner au point *G*, sur l'horizontale *KA*, il y en a deux qui rendent nulle la force *M* et qui sont en *K* et en *A*; en effet, dans la première position la masse se soutient par le frottement et la cohésion, dans la seconde la masse s'évanouit. Il y a donc une position de *G*, entre *A* et *K*, qui rend *M* un maximum, et cette plus grande valeur de *M* est celle

de l'effort horizontal que la verticale AB a à supporter par la pression du profil des terres qu'elle soutient.

642. La détermination importante, pour l'objet de recherche qui nous occupe, est donc celle du maximum de valeur de M, et il faut d'abord trouver l'expression générale de cette valeur correspondante à un angle quelconque GBA; je vais la déduire de l'équation (2) de l'art. 627.

$$M = \frac{P - K\,\{\cos.\psi + \sin.\psi \,\mathrm{tang.}\,(\psi + \phi)\}}{\mathrm{tang.}\,(\psi + \phi)}$$

Je prends le signe inférieur partout où il y a un double signe, vu que par l'état de la question, les résistances dues à la cohésion et au frottement, doivent concourir avec M pour soutenir le triangle ABK sur la ligne BK.

D'après la notation convenue art. 615 et 623, on a *angle* $FBC = \phi$, *angle* $GBA = \psi$; faisant ensuite $AB = h$, désignant par Π le poids de l'unité de surface du profil $ABCD$ et par k la cohésion sur l'unité de longueur, le poids du triangle ABG sera $\frac{1}{2}\,\Pi\,h^2\,\mathrm{tang.}\,\psi = P$, et la cohésion, sur la longueur totale BG, sera $\frac{kh}{\cos.\psi} = K$.

643. Ces valeurs, introduites dans l'équation (2) de l'article 627, la changent en

$$M = \frac{\Pi\,h^2\,\mathrm{tang.}\,\psi}{2\,\mathrm{tang.}\,(\psi+\phi)} - \left\{\frac{kh}{\mathrm{tang.}\,(\psi+\phi)} + kh\,\mathrm{tang.}\,\psi\right\}$$

644. Faisant, dans l'équation de l'article précédent, $\frac{dM}{d\psi} = 0$, on a

$$\frac{\frac{1}{2}\,\Pi\,h^2\left\{\frac{\mathrm{tang.}\,(\psi+\phi)}{\cos.^2\psi} - \frac{\mathrm{tang.}\,\psi}{\cos.^2(\psi+\phi)}\right\}}{\mathrm{tang.}^2\,(\psi+\phi)} - kh\left(\frac{1}{\cos^2\psi} - \frac{1}{\sin^2(\psi+\phi)}\right) = 0$$

Il n'est pas difficile de s'assurer qu'en faisant dans cette équation $\psi = \frac{1}{2}$ *complément de* ϕ, le terme multiplié par $\frac{1}{2}\,\Pi\,h^2$ et le terme multiplié par k s'évanouissent chacun en particulier; ainsi nous voilà parvenus au théorème fort simple que j'ai donné, le premier, dans mon traité, cité art. 638. « Le prisme de plus grande poussée des terres sou-« tenues par un plan vertical, est celui dont la face inclinée (la surface « des terres est supposée horizontale) fait, avec ce plan, un angle égal

« à la moitié de celui que forme, avec le même plan, la ligne de talus
« des terres fraîchement remuées et dont la cohésion est détruite. »

645. Il est à remarquer que ce théorème donne, entre les angles ψ et ϕ, une relation entièrement indépendante de la cohésion. Pour mettre en évidence la compatibilité de cette propriété curieuse avec les applications à faire de l'analyse précédente, j'ai déterminé dans mon traité, ci-dessus cité, la relation générale qui existe entre les angles KBA et FBA formés, respectivement, avec la verticale, par les lignes de talus des terres cohérentes et des terres fraichement remuées, et j'ai démontré que lorsque la hauteur AB excédait celle sur laquelle on peut fouiller, à pic, les terres cohérentes, sans qu'elles s'éboulent, l'angle KBA qui, d'après mon analyse, dépend de la hauteur AB, était toujours plus petit que l'angle FBA et plus grand que la moitié de cet angle.

J'ai fait voir, de plus, que, lorsque la hauteur AB était égale à celle sur laquelle on peut fouiller les terres à pic sans qu'elles s'éboulent, la même analyse donnait une valeur nulle de la poussée horizontale correspondante à l'angle sous lequel cette poussée doit, en général, être un maximum, et qu'ainsi cette poussée était nulle, non seulement sous l'angle dont je viens de parler, mais sous tous les angles possibles, ce qui est d'ailleurs évident, d'après l'hypothèse sur laquelle on raisonne.

646. On ne peut pas douter, pour peu qu'on soit accoutumé à saisir l'esprit du calcul et à interpréter l'analyse, que l'angle ϕ, dont la relation avec ψ est donnée (dans le cas du maximum de M) par l'équation $\psi = \frac{1}{2}$ *complément de* ϕ (art. 644), ne soit réellement l'angle du frottement ; introduisons ce demi-complément de ϕ dans l'équation générale de l'art. 643, appliquée au cas où la cohésion étant détruite, le frottement serait la seule résistance au glissement des terres le long de la ligne de talus, et pour cela, faisons $\phi = \frac{1}{2}\pi - \tau$ (je désigne par π la demi-circonférence dont le rayon $= 1$) et $k = 0$, l'équation de l'art. cité deviendra

$$M = \frac{\frac{1}{2}\Pi h^2 \operatorname{tang}\psi}{\operatorname{tang.}(\frac{1}{2}\pi + \psi - \tau)} = \frac{1}{2}\Pi h^2 \operatorname{tang.}\psi \operatorname{tang.}(\tau - \psi)$$

la puissance horizontale M s'évanouit lorsque $\psi = \tau$, parceque τ est l'angle formé par la ligne de talus et par la verticale, lorsque cette ligne de talus est celle sur laquelle les molécules de terre se soutiennent par le seul frottement.

C'est,

C'est par ce raisonnement et par la marche d'analyse suivie dans les articles précédents qu'un géomètre du premier ordre, à l'occasion de quelques discussions auxquelles ma théorie a donné lieu, a pris la peine de vérifier mes résultats qu'il a trouvés parfaitement exacts à tous égards.

647. En exprimant M par une fonction déduite des formes des murs de revêtement et employant convenablement, le théorème de l'art. 644, on obtient toutes les déterminations dont les constructeurs ont besoin. Ces détails doivent être étudiés dans l'ouvrage même où je les ai consigné et dont on explique chaque année aux élèves les principales propositions dans le cours de *constructions publiques*.

648. Lorsque j'en serai à la partie du cours de ma *mécanique* qui traite de l'*équilibre des fluides*, je ferai voir comment ma théorie de la poussée des terres s'applique à tous les degrés de consistance qu'elles peuvent avoir, depuis la cohésion infinie, ou la dureté parfaite, jusqu'à la fluidité parfaite.

De l'équilibre du levier et de la poulie, en ayant égard au frottement.

649. Le levier et la poulie sont, ainsi que je l'ai déjà observé, ou munis d'axes avec lesquels ils font corps, et qui tournent dans des boîtes ou ouvertures circulaires immobiles, ou percés eux-mêmes, de trous circulaires à travers lesquels passent les axes fixes. La fig. 44, nos 1 et 2, représente deux leviers dont l'un, n° 1, se rapporte au 1er. cas et l'autre, n° 2, au 2e. cas. Fig. 44 nos. 1 et 2

Je suppose que chacun de ces leviers est sollicité par des forces agissant dans un plan perpendiculaire à son axe, qui est le plan de la figure; j'appelle M la résultante (dont VM est la direction et le sens d'action) de toutes les forces qui tendent à faire tourner dans un sens, et je désigne par R la résultante (dont WR est la direction et le sens d'action) de toutes les forces qui tendent à faire tourner dans le sens opposé.

Lorsqu'il y aura équilibre, l'axe et l'ouverture circulaire (ouverture dans laquelle tourne l'axe n° 1, ou qui tourne sur cet axe n° 2) entre lesquels il doit toujours y avoir un peu de jeu, seront en contact en un point T par où passe la résultante des forces M et R, laquelle ne doit pas, eu égard au frottement, être perpendiculaire à la tangente commune TL des deux courbes en contact, mais doit, au moment où

l'équilibre est prêt à se rompre, faire, avec cette tangente, un angle complément de l'angle du frottement, ou autrement, faire, avec la perpendiculaire TK à cette tangente, un angle égal à l'angle du frottement.

Je rapporterai les directions, tant des forces que des résistances dues au frottement, aux deux axes coordonnés AX et AY; α' et α'' représenteront les angles formés par l'axe AX et par les directions respectives de M et de R; θ sera l'angle formé par le même axe AX et par la tangente au point de contact T qui est la ligne suivant laquelle la résistance du frottement se fait éprouver; λ désignera l'angle compris entre les directions de M et de R, N la pression normale au point T, f le rapport du frottement à la pression normale, fN étant, par conséquent la valeur de ce frottement; on aura $CD = a$ et $CB = b$, CD et CB étant les perpendiculaires respectives abaissées du centre C (qui est celui de l'axe, n° 1, et celui de l'ouverture circulaire, n° 2,); enfin ρ est le rayon de l'axe, n° 1, et de l'ouverture circulaire n° 2.

650. La force M est censée prête à mettre le levier en mouvement, en surmontant R et la résistance du frottement (j'assignerai bientôt les limites entre lesquelles M et R peuvent varier) et considérant la pression normale N et le frottement fN, comme des forces *actives* appliquées au levier, l'une dans le sens TK et l'autre dans le sens TL, on peut poser les équations d'équilibre comme si le corps était libre. Il faut faire attention, relativement aux composantes des forces fN, quelles ont des signes différents dans le cas du n° 1 et dans celui du n° 2.

On a, ainsi, les équations d'équilibre

$$(1) \ldots \ldots \begin{cases} M \cos.\alpha' + R\cos.\alpha'' = N\sin.\theta \pm fN\cos.\theta \\ M\sin.\alpha' + R\sin.\alpha'' = N\cos.\theta \mp fN\sin.\theta \end{cases}$$

$$(2) \ldots \ldots Ma - Rb = f\rho N$$

651. Faisant la somme des équations (1) de l'article précédent, après avoir élevé au carré chacun de leurs membres, l'angle θ s'élimine et on a, en observant que $\alpha'' - \alpha' = \lambda$,

$$(1) \ldots \ldots \ldots N = \left\{\frac{M^2 + 2MR\cos.\lambda + R^2}{1 + f^2}\right\}^{\frac{1}{2}};$$

l'équation (2) du même article donne

$$(2) \ldots \ldots \ldots N = \frac{Ma - Rb}{f\rho}.$$

on déduit de ces deux équations

$$(3) \ldots\ldots Ma = Rb + \frac{f\rho\,(M^2 + 2MR\cos.\lambda + R^2)^{\frac{1}{2}}}{(1+f^2)^{\frac{1}{2}}}$$

L'expression $(M^2 + 2MR\cos.\lambda + R^2)^{\frac{1}{2}}$ est, art. 51, la valeur de la résultante de M et de R.

652. L'équation (3) de l'article précédent donne, en observant que $(a^2 + 2ab\cos.\lambda + b^2)^{\frac{1}{2}}$ est la distance entre les points D et B où se trouvent les pieds des perpendiculaires abaissées du centre C sur les directions des forces M et R, désignant cette distance par c, et faisant, de plus $\left(1 + \frac{1}{f^2}\right)^{\frac{1}{2}} = q^2$,

$$(1) \ldots\ldots \frac{M}{R} = \frac{abq^2 + \rho^2\cos.\lambda \pm \rho\sqrt{q^2c^2 - \rho^2\sin^2\lambda}}{a^2q^2 - \rho^2}$$

Il y a beaucoup de cas de pratique qui permettent de négliger le carré ρ^2 et on a, alors, l'équation très-simple

$$(2) \ldots\ldots \frac{M}{R} = \frac{b}{a} \pm \frac{\rho c}{a^2 q}.$$

653. Lorsque les directions de M et de R sont parallèles, $c = a + b$, $\lambda = 0$, et l'équation (1) de l'article précédent devient

$$(1) \ldots\ldots \frac{M}{R} = \frac{abq^2 + \rho^2 \pm \rho q(a+b)}{a^2q^2 - \rho^2}$$

et en négligeant ρ^2

$$(2) \ldots\ldots \frac{M}{R} = \frac{b}{a} \pm \frac{\rho(a+b)}{a^2q}.$$

654. Pour avoir le cas de la poulie, il suffit de faire $a = b$ et l'équation de l'art. 652 devient

$$(1) \ldots\ldots \frac{M}{R} = \frac{a^2q^2 + \rho^2\cos.\lambda \pm \rho\sqrt{q^2c^2 - \rho^2\sin^2\lambda}}{a^2q^2 - \rho^2}$$

et en négligeant ρ^2

$$(2) \ldots\ldots \frac{M}{R} = 1 \pm \frac{\rho c}{a^2q}.$$

Si les forces sont parallèles cette dernière équation devient

$$(3) \ldots\ldots \frac{M}{R} = 1 \pm \frac{2\rho}{aq}.$$

Ces diverses équations peuvent être fort utiles dans la pratique; on voit que dans les poulies qui se rapportent au n° 2, et qui sont celles dont on se sert dans la marine, le frottement ne dépend pas du diamètre de l'axe, mais de celui de l'ouverture circulaire pratiquée au centre de la poulie qui tourne sur l'axe.

Des variations que peuvent subir deux puissances appliquées à un levier, sans que l'état de repos de ce levier cesse d'avoir lieu.

655. Une marche de raisonnement semblable à celle que jai employée art. 630, pour le plan incliné, va donner très-simplement, et sans calcul, le théorême d'après lequel on pourra aisément déterminer les variations que les deux puissances M et R, appliquées au levier, peuvent subir, sans que l'état de repos de ce levier cesse d'avoir lieu.

Fig. 45 Soit le cercle AB, qui a son centre en C, la coupe transversale du cylindre GG', figure 44, n°. 1, ou de l'ouverture GG' n°. 2, et T le point où la direction QT de la résultante de M et de R vient couper ce cercle, T étant, comme dans les figures 44, n°s. 1 et 2, le point sur lequel la pression normale N et le frottement fN ont lieu. Menant, par le point T, une tangente $L'L$ au cercle AB, le levier se trouve dans l'état d'un corps posé sur le plan incliné $L'L$ et sollicité par une puissance dirigée suivant QT, résultante de M et de R que je désigne par Q, et dont la composante, perpendiculaire à $L'L$, produit la pression N et le frottement fN. Soit KTC la direction de cette dernière composante (qui a pour valeur $Q \times \sin. QTL$) et traçons deux droites TF, TF' faisant, avec TK un angle égal à l'angle ϕ du frottement; d'après ce que j'ai expliqué précédemment, la résistance fN, qui a son effet sur la ligne LL', annulera l'action de Q, prise dans le sens de cette même ligne, tant que la direction QT sera comprise dans l'angle $F'TF$; Q sera prêt à vaincre le frottement et à produire un mouvement naissant, lorsque QT se confondra ou avec FT ou avec $F'T$; le mouvement sera produit si cette direction QT se trouve, soit dans l'angle FTL, soit dans l'angle $F'TL'$; enfin la coïncidence de QT et de KT assure l'équilibre, indépendamment du frottement.

656. Il est aisé d'obtenir, par les considérations précédentes, les limites des valeurs, soit de M soit de R, entre lesquelles le système se

maintient dans l'état de repos; j'en supprime le calcul, pour abréger, mais si on veut déduire des mêmes considérations une expression analytique de conditions équivalentes à celles que je viens d'assigner, on menera les lignes Cb, Cb', respectivement perpendiculaires sur FT et $F'T$ prolongées; désignant par k chacune de ces perpendiculaires, qui sont d'égales longueurs, et se rappelant que le rayon TC et l'angle FTK ou $F'TK$, ont été représentés par les lettres ρ et ϕ, on aura $k = \rho \sin. \phi$, ou, en employant la valeur $f = \text{tang.}\, \phi$ et observant que $\sin. \phi = \frac{\text{tang.}\, \phi}{\sqrt{1 + \text{tang.}^2 \phi}}$.

$$k = \frac{f\rho}{\sqrt{1+f^2}}$$

QK est la valeur du moment de la résistance Q lorsque sa direction se confond avec FT ou $F'T$, et si on généralise la signification de k, en lui faisant représenter la perpendiculaire $C6$ abaissée du centre C sur QT prolongée, l'inégalité $\frac{k}{\rho} < \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}$ indiquera que la direction de Q est comprise dans l'angle FTF', condition qui assure le repos du système, et l'inégalité $\frac{k}{\rho} > \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}$ indiquera que le levier se meut ou est prêt à se mouvoir.

On a donc, pour condition unique d'équilibre, ou de *repos*, $\frac{k}{\rho} < \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}$.

De la roideur des cordes et des chaînes; comment on la fait entrer en considération dans le calcul des machines.

657. J'ai, jusqu'à présent, supposé parfaitement flexibles les cordes ou fils qui faisaient partie des systèmes dont les conditions d'équilibre ont été déterminées dans ce traité; mais les grosses cordes et les cables, qu'on est obligé d'employer en se servant des machines, opposent à leur flexion des résistances qui ont une influence sensible sur les effets de ces machines, et dont il faut tenir compte dans le calcul.

Soit AB le diamètre horizontal d'une poulie ayant son axe et son Fig. 46

centre de mouvement en C; P et Q des poids suspendus aux extrémités E et D d'une corde $EBAD$ enroulée sur la poulie. Faisant abstraction du frottement on doit avoir, pour l'équilibre, $P=Q$, mais la roideur de la corde peut, seule, empêcher que cette égalité n'ait lieu, et voici comment cet effet se produit.

Le poids P, étant celui qu'on destine à opérer, par sa descente, l'ascension du poids Q, tend à faire enrouler, sur la poulie, l'extrémité supérieure de la portion de corde DA; mais la roideur de cette corde s'oppose à sa flexion et l'effet de cette résistance est d'écarter le poids Q de la verticale menée par le point A, et de placer son centre de gravité dans une verticale sa plus éloignée du centre C que le point A.

Le contraire a lieu, du côté de B, et le centre de gravité du poids P se trouve dans une verticale br plus rapprochée du centre C que le point B; on peut, pour plus d'exactitude, supposer que A et B sont des points placés à la rencontre de l'axe de la corde et du diamètre horizontal de la poulie.

Dans cet état des choses, le moment du poids P sera $P\times Cb$, ou $P\times(BC-Bb)$, le moment de Q sera $Q\times(CA+Aa)$, et on aura, par la condition de l'équilibre,

$$P\times(CB-Bb)=Q\times(CA+Aa)$$

658. On déduit de cette équation en faisant $CA=CB=r$; $Aa=\varepsilon$; $Bb=\varepsilon'$.

$$P-Q=\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{r-\varepsilon'}\,Q$$

Tel est l'excès de valeur que P doit avoir sur Q pour être prêt à opérer son ascension, en surmontant la résistance due à la roideur de la corde.

659. ε et ε' sont des quantités à déterminer par expérience, et je puis déjà dire que la résistance de la corde à se dérouler au point B a été reconnu si foible qu'on peut la négliger dans le calcul, au moyen de quoi l'équation de l'article précédent devient

$$P-Q=\frac{\varepsilon}{r}\,Q.$$

expression de la résistance due à la roideur de la corde, d'une exactitude suffisante pour la pratique.

660. Je vais, maintenant, chercher une autre expression de la même

résistance, dans laquelle entrent des quantités dont la détermination, par l'expérience, offre plus de facilité que celle de la quantité ε, dont elles pouront faire connaître la valeur.

J'observe d'abord qu'une corde tendue oppose à sa flexion, 1° une résistance constante provenant de son *ourdissage* et indépendante de sa tension; 2° une résistance variable provenant de sa tension.

La première résistance étant désignée par Am, et la 2° par AnQ, leur somme sera $A(m+nQ)$, Q étant la tension, m et n des constantes, et A une fonction du diamètre de la corde et de celui du cylindre. Or le raisonnement et l'expérience s'acordent pour prouver que les résistances dues à différentes cordes, qui s'enroulent sur des cylindres de différents diamètres, suivent les raisons inverses des rayons de ces cylindres et les raisons directes d'une certaine puissance μ des diamètres de ces cordes, ensorte que dans l'expression générale $A(m+nQ)$ on doit avoir $A = \frac{k^\mu}{r}$, k étant le diamètre de la corde et r le rayon du cylindre, et cette expression devient

$$\frac{k^\mu}{r}(m+nQ).$$

661. Cette même résistance a été trouvée art. 659, égale à $\frac{\varepsilon}{r}Q$; et en égalant ses deux valeurs entr'elles, on a

$$\varepsilon = \frac{k^\mu(m+nQ)}{Q}$$

C'est l'expression d'une augmentation du bras de levier du poids Q dont l'effet équivaut à celui de la résistance due à la roideur de le corde; ainsi on peut introduire cette résistance dans le calcul par la règle suivante.

« Ayant l'expression des conditions de l'équilibre d'une machine, « conformes aux règles théoriques et pratiques précédemment établies, « s'il se trouve, dans cette machine, une corde dont le diamètre soit k « et la tension Q, tirant tangentiellement à un cercle dont le rayon $=r$, « sur lequel elle doit s'enrouler, on aura égard à sa *roideur*, dans l'é- « valuation du moment de Q par rapport au centre du cercle, en subs- « tituant à r la quantité $r+\varepsilon$ »

Il faut observer que cette augmentation du rayon de r ne doit lui

être atribuée qu'en tant qu'il est considéré comme le bras de levier de Q, et qu'on ne doit rien changer à sa valeur dans les expressions où il est employé d'une autre manière.

662. Voici des résultats d'expériences, tirés de la 5ᵉ section de la 1re partie de mon *architecture hydraulique*, pour servir à la détermination numérique des constantes de l'expression $\frac{k^{\mu}}{r}(m+nQ)$; ces expériences faites avec beaucoup de soin par feu M. Coulomb, membre de l'Institut, donnent les poids nécessaires pour plier différentes cordes autour d'un rouleau de 0,metre054 de rayon

INDICATION DES CORDES	CIRCONFÉRENCE DES CORDES.	POIDS PAR MÈTRE DE LONGUEUR	POIDS CONSTANTS OU VALEUR DE $\frac{k^{\mu}}{r}m$	POIDS PROPORTIONEL A UNE CHARGE DE CENT KILOG. OU VALEUR DE $\frac{k^{\mu}}{r}n \times 100$
	Millimètres.	Grammes.	Kilogrammes	Kilogrammes
Corde blanche de 30 fils de carret.	63	283,4	2,1	9,0
Corde blanche de 15 fils de carret.	45	144,8	0,6	5,1
Corde blanche de 6 fils de carret.	28	52,2	0,1	2,2
Corde goudronnée de 30 fils de carret.	74	332,6	3,3	11,6
Corde goudronnée de 15 fils de carret.	54	163,2	1,0	5,6
Corde goudronnée de 6 fils de carret.	30	69,3	0,2	2,4

On pourra, pour les cordes blanches, faire $\mu = 1,7$ lorsque ces cordes seront neuves, et $\mu = 1,4$ lorsqu'elles seront usées. La roideur des cordes goudronnées, est, toutes choses égales d'ailleurs, sensiblement proportionnelle au nombre de fils de carret qui entrent dans ces cordes. (Voyez art. 1177, et suivants de mon ouvrage ci-dessus cité, les moyens que

que j'ai employés pour la détermination numérique de m et de n.)

663. Il me reste à parler de la résistance due à la roideur des chaînes, et ce que j'ai à dire s'appliquera à la chaîne représentée par la fig. 47 dont les chaînons sont assemblés les uns aux autres par des axes. Cette chaîne enroulée sur une poulie dont AB est le diamètre horizontal (les points A et B peuvent être supposés placés aux centres des axes des chaînons), porte, à ses extrémités, des poids P et Q. Ces poids sont écartés de la verticale par le frottement que chacun des chaînons, placés en B et A, exerce sur son axe. Nommant η et η' les résistances respectives des frottements qui ont lieu autour de ces axes, et ρ la longueur commune de leurs rayons, les moments des frottements seront $\rho\mu$ et $\rho\mu'$; et comme c'est la résistance due au frottement qui tient les centres de gravité des poids P et Q aux distances respectives Bb et Aa des verticales passant par les points B et A, on doit avoir $P\times Bb=\rho\eta$ et $Q\times Aa=\rho\eta'$.

fig. 47

On déduit de ces équations

$$(1) \ldots\ldots\ldots Bb=\frac{\rho\eta}{P}\ ;\ Aa=\frac{\rho\eta'}{Q}.$$

et, comme, en désignant par r le rayon de la poulie, les conditions d'équilibre donnent

$$(2) \ldots\ldots\ldots P\times(r-Bb)=Q\times(r+Aa);$$

on a ultérieurement pour la valeur de $P-Q$

$$(3) \ldots\ldots\ldots P-Q=\frac{\rho}{r}(\eta+\eta')$$

664. Les quantités η et η' ne peuvent pas être fort différentes l'une de l'autre, car leur différence n'est qu'une fraction de l'excès de P sur Q nécessaire pour vaincre le frottement; ainsi on peut faire $\eta+\eta'=2\eta$, et l'équation (3) de l'article précédent devient

$$P-Q=\frac{2\rho\eta}{r}$$

665. Le frottement étant égal au produit de la pression par un nombre constant f, on a $\eta=fQ$, d'où

$$(1) \ldots\ldots\ldots P-Q=\frac{2f\rho}{r}Q$$

valeur, adaptée aux calculs pratiques, de l'excès que P doit avoir sur Q,

eu égard à la roideur de la chaîne. L'excès correspondant du moment de P est $2f\rho Q$; ainsi on a, dans le cas d'équilibre, $Pr = Qr + 2f\rho Q$, ou

$$(2) \ldots\ldots\ldots \quad Pr = Q(r + 2f\rho).$$

La quantité $2f\rho$ remplit ici la même fonction qu'on a vu faire, art. 661, à la quantité $\frac{k^{\mu}(m+nQ)}{Q}$, lorsqu'il s'est agi de la roideur des cordes; et la règle, donnée à l'article cité, s'applique, sans restriction, à l'emploi de $2f\rho$ comme augmentation de la valeur du bras de levier du poids Q.

Le rapport f est la seule quantité à déterminer par expérience et on trouvera, dans la 5e section de la 1re partie de mon *Architecture hydraulique*, les résultats des meilleures expériences qui aient été faites sur le frottement des axes.

FIN DE LA QUATRIÈME SECTION DE LA STATIQUE, ET DE LA PREMIÈRE PARTIE DES LEÇONS DE MÉCANIQUE.

TABLE DES MATIERES
CONTENUES
DANS LA PREMIÈRE PARTIE.

SECTION I.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES ET PARTIE DE LA STATIQUE

DANS LAQUELLE ON CONSIDÈRE

PLUSIEURS FORCES APPLIQUÉES A UN MÊME POINT.

SECTION II.

DE L'ÉQUILIBRE ET DE LA COMPOSITION DES FORCES

APPLIQUÉES A UN SYSTÈME DE POINTS

DONT LA FORME EST INVARIABLE.

SECTION III.

DE L'ÉQUILIBRE DES FORCES APPLIQUÉES

A UN SYSTÈME DE POINTS DONT LA FORME EST VARIABLE;

PRINCIPE GÉNÉRAL DE L'ÉQUILIBRE.

SECTION IV.

DE L'ÉQUILIBRE DES MACHINES

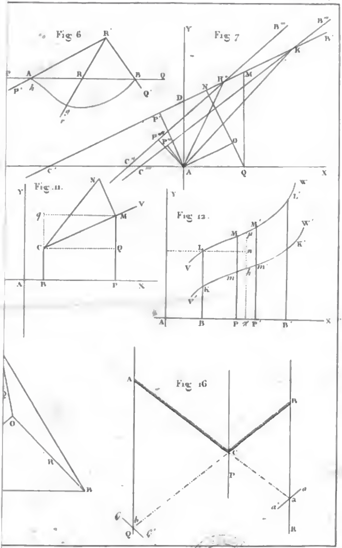
EN FAISANT ENTRER EN CONSIDÉRATION

LES RÉSISTACES DUES A L'ADHÉSION, AU FROTTEMENT,

A LA ROIDEUR DES CORDES ET DES CHAINES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES CONTENUES DANS LA PREMIÈRE PARTIE.

Pl. 1.



Pl. 2

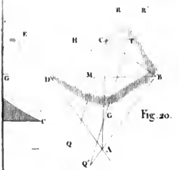


Fig. 20.

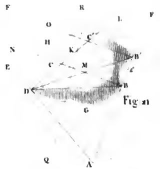


Fig. 21

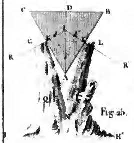


Fig. 25.

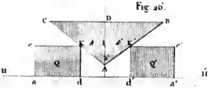


Fig. 26.

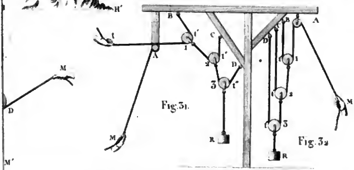


Fig. 31.

Fig. 32

Pl. 3.

